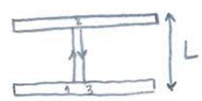
Aula 4 - 15/08 Marina

Consequências de c = constante $(=1)$

$$\boxed{c_{Alice} \equiv c_{Bob} \equiv c}$$

Experimento

Alice



feixe de luz entre 2 espelhos

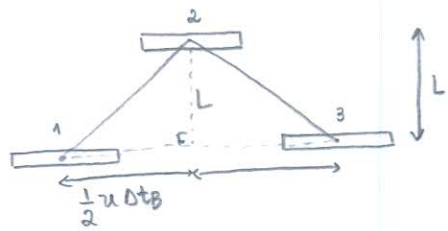
espelhos parados um em relação ao outro

$$\Delta x_A = \Delta y_A = \Delta z_A = 0$$

$$\Delta t_A = \frac{2L}{c_A} = \frac{2L}{c} \Rightarrow \boxed{2L = c\,\Delta t_A} \; (*)$$

Bob

$x \rightarrow u$



$$\Delta y_B = \Delta z_B = 0$$

$$\Delta x_B = u\,\Delta t_B$$

$$\text{distância} = c_B \Delta t_B = c\,\Delta t_B \Rightarrow \boxed{2\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}u\Delta t_B\right)^2 + L^2} = c\,\Delta t_B}$$

$$c^2 \Delta t_B^2 = 4\left[\left(\frac{1}{2}u\Delta t_B\right)^2 + L^2\right] = u^2 \Delta t_B^2 + 4L^2 = \Delta x_B^2 + 4L^2$$

ali em cima

$$c^2 \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 = 4L^2 \overset{(*)}{=} c^2 \Delta t_A^2$$

mantendo c constante, a relação entre os referenciais é: $\boxed{c^2 \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 = c^2 \Delta t_A^2}$

Por simetria, podemos adicionar termos que são zero da seguinte forma:

$$c^2 \Delta t_B^2 - (\Delta x_B^2 + \underbrace{\Delta y_B^2 + \Delta z_B^2}_{=0}) = c^2 \Delta t_A^2 - (\underbrace{\Delta x_A^2 + \Delta y_A^2 + \Delta z_A^2}_{=0})$$

Usaremos esse resultado para deduzir as transformações de Lorentz, que são uma generalização das de Galileo para o espaço-tempo.

Considere
$$\begin{cases} c^2 \Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 = c^2 \Delta t_A^2 - \Delta x_A^2 & \text{(transformação finita)} \\ c^2 dt_B^2 - dx_B^2 = c^2 dt_A^2 - dx_A^2 & \text{(transformação infinitesimal)} \rightarrow \text{partículas} \\ \text{ou } -c^2 dt_B^2 + dx_B^2 = -c^2 dt_A^2 + dx_A^2 & \rightarrow \text{por causa da métrica usada em gravitação e cordas} \end{cases}$$

Vamos definir coordenadas do cone-de-luz:

→ falaremos dele daqui a pouco

$$\begin{cases} dx_B^+ = dx_B + c\,dt_B \\ dx_B^- = -dx_B + c\,dt_B \end{cases}$$ → sinais já estão convertidos.

$$\begin{cases} dx_B^+ dx_B^- = c^2 dt_B^2 - dx_B^2 \\ dx_A^+ dx_A^- = c^2 dt_A^2 - dx_A^2 \end{cases}$$ → devem ser iguais

↳ Solução $\begin{cases} dx_B^+ = e^{+\varphi} dx_A^+ \\ dx_B^- = e^{-\varphi} dx_A^- \end{cases}$, $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} c\,dt_B = \frac{1}{2}(dx_B^+ + dx_B^-) = \frac{1}{2}(e^{\varphi} dx_A^+ + e^{-\varphi} dx_A^-) = \cosh\varphi \; c\,dt_A + \sinh\varphi \; dx_A \\ dx_B = \frac{1}{2}(dx_B^+ - dx_B^-) = \sinh\varphi \; c\,dt_A + \cosh\varphi \; dx_A \end{cases}$$

Colocando na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} c\,dt_B \\ dx_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} c\,dt_A \\ dx_A \end{pmatrix} \quad (*)$$

→ ≠ Galileu, em que $dt_A = dt_B$.

Boost de Lorentz

↳ diferentemente de rotações, essa matriz é simétrica e as funções trigonométricas são hiperbólicas

Para determinar φ em função de u:

$$dx_B = 0 \rightarrow \begin{cases} dx_A = -u\,dt_A \\ \cosh\varphi \; dx_A = -\sinh\varphi \; c\,dt_A \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{u}{c} = \tanh\varphi}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_B}{\cosh\varphi} = \tanh\varphi \; c\,dt_A + dx_A = u\,dt_A + dx_A \\ \frac{c\,dt_B}{\cosh\varphi} = c\,dt_A + \tanh\varphi\,dx_A = c\,dt_A + \frac{u}{c} dx_A \end{cases}$$

⊛ Adição de Velocidades

↱ ele substituiu de acordo com a transformação (*)

$$v_B = \frac{dx_B}{dt_B} = \frac{dx_A + u\,dt_A}{dt_A + \frac{u}{c^2} dx_A} = \frac{\frac{dx_A}{dt_A} + u}{1 + \frac{u}{c^2}\frac{dx_A}{dt_A}} = \frac{v_A + u}{1 + \frac{u v_A}{c^2}} \neq \underbrace{v_A + u}_{\text{Galileu}}$$

Cone de Luz

- $d\vec{r}^{\,2} = dx^2 + dy^2 + dz^2$: invariante sob rotações de $SO(3)$
- $ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$: invariante sob transformações de Lorentz → $SO(1,3)$

não é $SO(4)$ por causa do ⊖ no tempo

elemento de linha: separação entre 2 eventos no espaço-tempo

↳ não necessariamente $> 0 \Rightarrow ds^2 \begin{cases} > 0 : \text{tipo espaço} \\ = 0 : \text{tipo luz} \\ < 0 : \text{tipo tempo} \end{cases}$

$$dx^\mu \equiv \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cdt \\ dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

contravariante

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} = \text{invariante} = \sum_{\mu,\nu=0,1,2,3} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} = dx^0 dx^0 \eta_{00} + \ldots =$$

$$= -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2$$

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

métrica do espaço-tempo de Minkowski

(*) dx^μ: é um vetor sob $SO(1,3)$

$$dx^\nu \eta_{\mu\nu} \equiv dx_\mu = \begin{bmatrix} -cdt \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} \Rightarrow dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu = \sum_{\nu=0,1,2,3} \eta_{\mu\nu} dx^\nu$$

covariante

$$\begin{cases} dx_0 = \eta_{00} dx^0 = -cdt \\ dx_i = \eta_{i\nu} dx^\nu = \delta_{ij} dx^j \end{cases}$$

Vetor: V^μ: algo que se transforma como $V^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$

Sabemos que ds^2 é invariante : $ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} = dx^\mu dx_\mu$.

Então $V^\mu V_\mu = V^\mu V^\nu \eta_{\mu\nu}$ precisa ser invariante sob transformação de Lorentz.

$$V^{\mu'} V_{\mu'} = V^{\mu'} V^{\nu'} \eta_{\mu\nu} \overset{(*)}{=} \eta_{\mu\nu} \underbrace{(\Lambda^\mu{}_\rho V^\rho)}_{V^{\mu'}} \underbrace{(\Lambda^\nu{}_\sigma V^\sigma)}_{V^{\nu'}} \overset{!}{=} \underbrace{V^\mu V^\nu \eta_{\mu\nu}}_{V^\rho V^\sigma \eta_{\rho\sigma}}$$

$$= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma V^\rho V^\sigma = \eta_{\rho\sigma} V^\rho V^\sigma \Rightarrow \boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}}$$

↳ define uma transformação de Lorentz

Rearranjando : $(\Lambda_\rho{}^\mu)^T \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta} \longrightarrow \text{equivalente a } R^T \mathbb{1} R = \mathbb{1}$$

↑ preserva a métrica

$$
\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} & \text{Boosts} \\ \hline \text{Boosts} & \begin{array}{c}\text{Rotação} \\ \text{espacial igual} \\ \text{às de } SO(3)\end{array} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
$$

$$
\begin{cases} \Lambda^{0}{}_{0} = +1 > 0 \\ \det \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = 1 \\ \Lambda^{T} \eta \Lambda = \eta \end{cases}
$$

Transformações de Lorentz ortócronas e próprias
↳ as que iremos usar

Exercício: $\det \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = +1 \Rightarrow \boxed{d^4x' = d^4x}$

medida de integração $(dx^0 dx^1 dx^2 dx^3)$ no espaço-tempo de minkowski é invariante sob transformações de Lorentz. (Provar)

Dica: Jacobiano = determinante

importante para a ação no espaço-tempo → $S = \int dt \int d^3x \, \mathcal{L}$

⊛ Vetor sob $SO(1,3)$

$$V^{\mu} \rightarrow V'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V^{\nu}$$

⊛ Tensor sob $SO(1,3)$

$$
\begin{cases} \bullet \text{ ordem 2: } W^{\mu\nu} \rightarrow W^{\mu\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} W^{\rho\sigma} \\ \bullet \text{ ordem 3: } Z^{\mu\nu\rho} \rightarrow Z^{\mu\nu\rho'} = \Lambda^{\mu}{}_{\kappa} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} \Lambda^{\rho}{}_{\xi} Z^{\kappa\lambda\xi} \end{cases}
$$

—— = ——