Aula 7 - 25/08 Marina

"invariante" × "covariante"

(mesmo valor) (mesma forma) → muda de um jeito que eu sei comparar ("legal")

↓ ex: ação - escalar de $SO(1,3)$

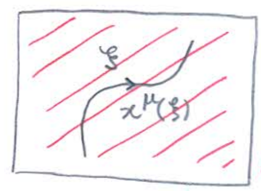
↓ ex: eqs. do movimento $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$

Partícula Relativística em um Campo de Fundo

Partícula: dinâmica. Campo de fundo: não-dinâmico (não tem derivadas de A_μ)

$$S = \underbrace{-m\int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}}_{\text{equivale a } \int dt\, \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 \text{ (termo cinético)}} + \underbrace{\int d\xi\, A_\mu(x(\xi))\frac{dx^\mu}{d\xi}}_{\text{equivale a } -\int dt\, V(\vec{x}) \text{ (termo potencial)}}$$

- Uma partícula relativística é descrita por $x^\mu(\xi)$
- Um campo é descrito por $A_\mu(x)$ ⟶



$A_\mu(x)$

Variando a ação em relação a $x^\mu(\xi)$: (*) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\delta S = 0 = \int d\tau \Big(-m\,\eta_{\mu\rho}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\delta x^\rho + \underbrace{F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu}_{F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\rho}\delta x^\rho}\Big) \quad \xi = \tau \qquad \rightarrow F^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}$$

$$\boxed{m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv \mathcal{F}^\mu}$$

Força de Lorentz ↪ ela é naturalmente relativística porque o EM é relativístico.

* No limite não-relativístico: $dt = dx^0 \gg dx^i$

$$(dx^0)^2 - (dx^i)^2 = d\tau \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} \simeq 1 \gg \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{e} \quad dt \simeq d\tau$$

$$\boxed{\mu = i} \Rightarrow m\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq F^i{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} = F^i{}_0\frac{dx^0}{d\tau} + \cancel{F^i{}_j\frac{dx^j}{d\tau}}^{\,0} = F^i{}_0 \cdot 1 = F^i{}_0$$

(muito menor)

$$A_0 = -V, \quad A_i = 0 \Rightarrow F^i{}_0 = F_{i0} = \partial_i A_0 - \cancel{\partial_0 A_i}^{\,0} = \partial_i A_0 = \partial_i(-V)$$

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i V \Rightarrow \boxed{m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V}$$ newton

Então há consistência com a mecânica clássica.

Conexão com a Força de Lorentz (Física III)

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \mathcal{F}^\mu \equiv F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \end{array}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ \hline E_x & 0 & -B_z & -B_y \\ E_y & B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

* $\underbrace{F_{0i}}_{\text{vetor sob } SO(3)} = -F_{i0}$ → separando tempo e espaço

↳ $\boxed{F_{0i} \equiv -E_i}$

* $\underbrace{F_{ij}}_{\text{tensor sob } SO(3) \text{ de ordem } 2} = -F_{ji}$

$\underbrace{\varepsilon_{ijk}F_{jk}}_{\text{vetor de } SO(3)} = \varepsilon_{ijk}F^{jk}$ → $\delta_{ij}F^{ij} = 0$ (não serve)

vetor de SO(3) → apenas 1 índice livre

↳ $\boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \equiv B_i}$

dúvida se tem ou não

$B_i = \alpha\,\varepsilon_{ijk}F_{jk} \qquad F_{jk} = ?$

$$\varepsilon_{imn}B_i = \alpha\,\underbrace{\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}}_{(\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})}F_{jk}$$

$$\varepsilon_{imn}B_i = \alpha(F_{mn} - F_{nm}) = 2\alpha F_{mn}$$

$\alpha \equiv \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{F_{mn} = \varepsilon_{imn}B_i}$

$F_{12} = \varepsilon_{i12}B_i = \varepsilon_{312}B_3 = +B_3$

$F_{31} = \varepsilon_{i31}B_i = \varepsilon_{231}B_2 = +B_2$

$F_{23} = \varepsilon_{i23}B_i = \varepsilon_{123}B_1 = +B_1$

Exercício: $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk} \overset{(?)}{=} \delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}$

* E_i e B_i são vetores de $SO(3)$

↓ complemento + promoção

$SO(1,3)$

$\cancel{E^\mu = (E^0, E^i)}$

$\cancel{B^\mu = (B^0, B^i)}$

não ocorre

→ são unificados em um tensor antissimétrico de ordem 2 : $F^{\mu\nu}$

↳ $\boxed{F^{\mu\nu} \xrightarrow{SO(1,3)} (F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}}$

sob as transformações de Lorentz, E e B se misturam e sua mistura depende do referencial

Exercício 1: EM em 2+1 D

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & B \\ E_y & -B & 0 \end{pmatrix}$$

E_i é vetor sob $SO(2)$

B é escalar sob $SO(2)$

grupo $SO(1,2)$

Exercício 2: EM em 4+1 D

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z & -E_w \\ E_x & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ E_y & & 0 & \bullet & \bullet \\ E_z & & & 0 & \bullet \\ E_w & & & & 0 \end{pmatrix}$$

E_i é vetor sob $SO(4)$

B é o quê?

Exercício 3: $m \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \mathcal{F}^\mu$ → Recuperar força de Lorentz fazendo $\mu = i$ e lembrando que $t \neq \tau$ e $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

Entender $\mu = 0$ (tem a ver com energia → $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}$, $p^0 = E$)

— " —

Ação para $A_\mu(x)$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$$

invariante de Lorentz, $SO(1,3)$

2 derivadas

invariante de gauge (calibre) ?

O que é uma transformação de gauge?

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \underbrace{\partial_\mu \Lambda(x)}_{\text{função escalar sob } SO(1,3)} \longrightarrow \text{não atua sob } x$$

Λ: parâmetro de gauge

Ação: $\int dx^\mu A'_\mu(x) = \int dx^\mu A_\mu(x) + \underline{\int dx^\mu \partial_\mu \Lambda(x)}$

$$\int dx^\mu \partial_\mu \Lambda(x) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau}\partial_\mu\Lambda(x) = \underbrace{\Lambda(x(\tau))\Big|_{\tau_i}^{\tau_f}}_{\text{termo de superfície}} = 0$$

Escolha $\begin{cases} \Lambda \to 0 \\ \tau \to \tau_i, \tau_f \end{cases}$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F_{\mu\nu}' = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda) =$$

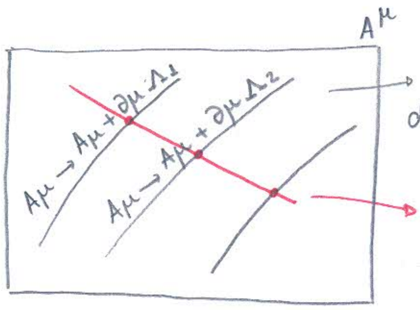
$$= F_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu}' = F_{\mu\nu}} \rightarrow \text{invariante de gauge}$$

→ E_i e B_i são invariantes de gauge

→ A_μ não.

* a transformação de gauge não é uma transformação de simetria; é uma redundância, um artefato da linguagem que aparece quando definimos teorias. Procuramos eliminar redundâncias a partir de "gauge fixing", que quebra a redundância de modo que a escolha não faça diferença (veremos mais pra frente)



→ órbitas que dependem da escolha de Λ

→ "gauge fixing" → pega 1 ponto em cada órbita

a.k.a. Jackson em 1 linha

—— " ——

carga → mede o acoplamento entre partículas e campo

convenção

$$S = \sum_{a=1}^{n} \int \underbrace{\left(- m_a \sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dx_a^\mu\, dx_a^\nu}\right.}_{\text{termo de partículas}} + \underbrace{\left. e_a A_\mu(x_a)\, dx^\mu_a \right)}_{\text{termo de interação entre partículas e campo}} - \underbrace{\frac{1}{4} \int d^4x\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Ação de Maxwell, termo do campo } A_\mu}$$

campo existe no espaço-tempo todo

não depende das partículas

→ não aparece nas eqs de movimento

"a partícula depende do campo, que depende de como as partículas se movem."

→ a generalização dessa ação é basicamente o modelo padrão em QFT ...

—— " ——