Aula 8 - 29/08

Marina

$$S = \int \Sigma_a \Big(\underbrace{-m_a \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu_a\, dx^\nu_a}}_{\text{III}} + \underbrace{e_a A_\mu(x_a)\, dx^\mu_a}_{\text{II}} \Big) \underbrace{- \frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{I}}$$

↓ não há termos de acoplamento entre partículas nessa ação explicitamente, mas a interação se dá através do campo

$$\text{I}: \quad \int dt \int d^3x\, \mathcal{L} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}_{Maxwell}}_{\text{densidade lagrangeana}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

- $\dfrac{\delta S}{\delta x^\mu_a} \rightarrow$ força de Lorentz II e III
- $\dfrac{\delta S}{\delta A_\mu} \rightarrow$ Equações de Maxwell I e II

Variação de I: $\delta \Big(\underbrace{-\frac{1}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{ação de Maxwell}} \Big)$

$$\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = (\delta F_{\mu\nu})F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) = (\delta F^{\mu\nu})F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(\delta F^{\mu\nu}) = 2F_{\mu\nu}\,\delta F^{\mu\nu} =$$

$$= 2F_{\mu\nu}(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu) = 2F_{\mu\nu}\,\partial^\mu \delta A^\nu - \underbrace{2F_{\nu\mu}\,\partial^\mu \delta A^\nu}_{\text{trocando índices}} = 2F_{\mu\nu}\,\partial^\mu \delta A^\nu - 2F_{\nu\mu}\,\partial^\mu \delta A^\nu =$$

$$= 2(F_{\mu\nu} - \underbrace{F_{\nu\mu}}_{-F_{\mu\nu}})\,\partial^\mu \delta A^\nu = 4F_{\mu\nu}\,\partial^\mu \delta A^\nu$$

$$\delta(S_{Maxwell}) = -\frac{4}{4}\int d^4x\, F_{\mu\nu}\,\partial^\mu \delta A^\nu = \int d^4x\, (\partial^\mu F_{\mu\nu})\,\delta A^\nu = \int d^4x\, (\partial_\mu F^{\mu\nu})\,\delta A^\nu$$

Variação de II: $\delta \Big(\int \Sigma_a\, e_a A_\mu(x_a)\, dx^\mu_a \Big)$ com $A_\mu(x_a) = \int d^4x\, \delta^4(x - x_a)\, A_\mu(x)$

$$= \delta\Big(\Sigma_a\, e_a \int d^4x\, \delta^4(x-x_a)\, A_\mu(x)\, dx^\mu_a \Big) = \delta\Big(\int d^4x\, \underbrace{\Sigma_a e_a \int d\tau_a \frac{dx^\mu_a}{d\tau_a}\, \delta^4(x - x_a(\tau_a))}_{J^\mu(x)} A_\mu(x) \Big) =$$

$$= \underbrace{\delta}_{\delta \text{ em relação a } A_\mu \text{ apenas}}\Big(\int d^4x\, J^\mu(x)\, A_\mu(x) \Big) = \int d^4x\, J^\mu(x)\, \delta A_\mu(x)$$

$\mathrm{I} + \mathrm{II} = 0$

$$\int d^4x \, (\partial_\mu F^{\mu\nu} \delta A^\nu(x)) + \int d^4x \, J^{\cancel{\mu}\nu}(x) \, \delta A_{\cancel{\mu}\nu}(x) = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$$ → aqui estão contidas 2 equações de maxwell

Gauss ↙ ↘ Ampère - maxwell

Fazendo $\nu = 0$: $\partial_\mu F^{\mu 0} = -J^0$ $\qquad J^0 \equiv \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ou $4\pi\rho$

$$\partial_0 F^{00} + \partial_i \underbrace{F^{i0}}_{-E_i} = -\rho$$

$$-\partial_i E_i = -\rho$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho}$$ → Lei de Gauss

Fazendo $\nu = i$: $\partial_\mu F^{\mu i} = -J^i$ $\qquad \boxed{F_{jk} = \varepsilon_{ijk} B_i}$

$$\partial_0 \underbrace{F^{0i}}_{E_i} + \cancel{\partial_i F^{ii}}^{\,0} + \partial_1 F^{12} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{21} + \partial_2 F^{23} + \partial_3 F^{31} + \partial_3 F^{32} = -\vec{J}$$

$$+\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla}\times\vec{B} = -\vec{J}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$ → Lei de Ampère-maxwell

Verificando a conservação da corrente nesse formalismo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$$

$$\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{simétrico}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{anti-simétrico}} = -\partial_\nu J^\nu \rightarrow \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\nu\mu}\partial_{\mu\nu} F^{\mu\nu\,\nu\mu} = \frac{1}{2}\underbrace{(\partial_\nu\partial_\mu - \partial_\mu\partial_\nu)}_{\text{comutam}} F^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\nu J^\nu = 0}$$

E as outras 2 equações de maxwell? Elas são identidades chamadas de Identidades de Bianchi.

$$\underset{\text{tensor dual}}{\tilde{F}_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{cases} 1, & \text{permutação par} \\ -1, & \text{permutação ímpar} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \frac{1}{2}\overbrace{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}^{\text{antissimétrico}}\underbrace{\partial_\nu\partial_\rho}_{\text{simétrico}} A_\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$$ ↳ aqui estão as equações que faltam

* Exercício: Encontrar
$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \rightarrow \nu = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \rightarrow \nu = i \end{cases}$$

* Exercício: Derivar Relatividade Geral :)
↳ só para reforçar a importância da abordagem com simetrias

Eletrostática

↳ cap. 1 do Griffiths

Vamos nos colocar em um referencial em que $\vec{J} = 0$ e $\vec{B} = 0$.

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \ (\text{ou } 4\pi\rho \text{ ou } \rho/\varepsilon_0) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{cases}$$

Analisaremos 2 situações
- há bastantes simetrias → $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$ é suficiente
- não há → ambas as equações são importantes → introduzimos $V(\vec{x})$ → equação de Poisson

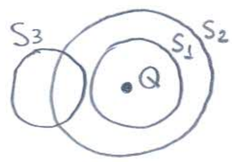
— até $\underbrace{\text{aqui}}_{\text{esse conteúdo que veremos agora}}$ cai na P1, mas, se cair o caso sem simetrias, cai pouco —

Lei de Gauss

Dado um volume $V \subset \mathbb{R}^3$:

$$\underbrace{\int_V d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \int_{S=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{teorema de Gauss}} = \underbrace{\int_V d^3x\, \rho}_{\int_V d^3x\,\rho \,\equiv\, Q}\, 4\pi \equiv 4\pi Q$$

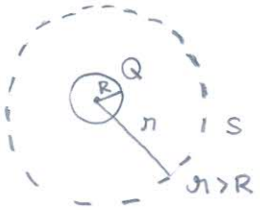
* A integral não depende da escolha da superfície, desde que ela contenha a carga



$$\int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Exemplo: Q distribuída em uma esfera de raio R



$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\int_S \hat{r}\cdot r^2 d\varphi d\theta \sin\theta\, \hat{r} =$$

$$= E(r)\, 4\pi r^2 = 4\pi Q$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$

simetrias: $\vec{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$

$$d\vec{S} = r^2 d\Omega\, \hat{r} = r^2 d\varphi d\theta \sin\theta\, \hat{r}$$

Força de Lorentz: $\vec{v} = 0,\ \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E} = q\frac{Q}{r^2}\hat{r}$

para escrever isso, estamos supondo que q não interage com Q, de forma que o campo seja fixo $\rightarrow q \ll Q$

↳ "no back-reaction"

* **Exercício:** $\vec{\nabla}\times\vec{E} \overset{(?)}{=} 0$ nesse exemplo

* **Exercício:** Estimar $\frac{F_{Coulomb}}{F_{Newton}} = ?$ par e^-, p^+

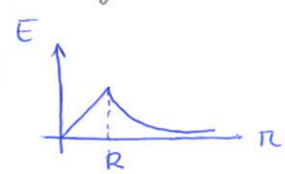
$$\frac{F_C}{F_N} = \frac{e^2}{GmM} \cong 10^{42}$$

↳ por isso desprezamos a interação gravitacional em EM.

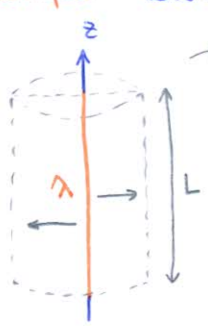
* em largas escalas, temos o caso contrário, porque as cargas têm que se anular

* **Exercício:** Esfera Uniforme

Verificar



* **Exemplo:** Densidade linear de carga



→ simetria: $\vec{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$

$$\int_{\text{tampas}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

↓

superfícies ortogonais ao campo

Mostrar $\vec{E}(r) = \frac{2\lambda}{r}\hat{r}$ ↳ versor em cilíndricas

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$