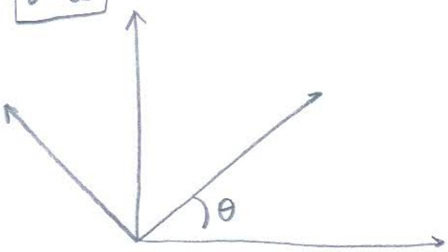
Aula 9 - 01/09 Marina

* Comentários sobre o exercício 10 da Lista 3.

$\boxed{D=2}$



$$R = \mathbb{1} + \overset{\text{parâmetro}}{A} + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$\begin{cases} R^T R = \mathbb{1} \longrightarrow (\mathbb{1}+A^T)(\mathbb{1}+A) \overset{!}{=} \mathbb{1} \\ \det R = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{A^T = -A}$$

deve ser antissimétrica

$$A = \underset{\text{ângulo infinitesimal}}{\delta\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base de matrizes antissimétricas}}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \underset{\text{perto de } \theta=0}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{\theta} = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{\theta}{N}\right)^N = \lim_{N\to\infty} (\underbrace{1+\delta\theta}_{\text{equivalente a } \mathbb{1}+A})^N$$

$$\delta\theta = \frac{\theta}{N}$$

$\delta\theta$ → ângulo infinitesimal
θ → ângulo finito
N → inteiro grande

$$e^{\theta} = \sum_n \frac{\theta^n}{n!} \to \sum_n \frac{A^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n \text{ par}} \frac{\theta^n}{n!}}_{\cos\theta} \mathbb{1} + \underbrace{\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{\theta^n}{n!}}_{\sin\theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = (\overset{\text{tempo}}{1}, \overset{\text{espaço}}{1})$

Boost na direção x: $\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta}$

$$\Lambda = \mathbb{1} + A + \mathcal{O}(\varphi^2) \longrightarrow (\mathbb{1}+A^T)\eta(\mathbb{1}+A) = \eta$$

$$\cancel{\mathbb{1}\eta\mathbb{1}} + A^T\eta + \eta A + \underset{\mathcal{O}(A^2)}{\cancel{A^T\eta A}} = \cancel{\eta}$$

$$\boxed{A^T\eta + \eta A = 0}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{22} = 0 \\ a_{12} = a_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\Lambda = \mathbb{1} + \varphi \underset{\text{simétrica}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} + \mathcal{O}(\varphi^2)$$

↳ Generalizar para mais dimensões espaciais com J_i

$\mathfrak{so}(1,3)$ (álgebra) : $[K_x, K_y] \sim J_z$

↳ boosts em 2 direções geram rotação na outra

Geradores de SO(3)

$J_{\mu\nu} = - J_{\nu\mu}$ → 6 geradores $\begin{cases} 3\, J_{0i} \to \text{boosts} \\ 3\, J_{ij} \to \text{rotações} \end{cases}$

↓

grupo de Lorentz

Em $D = 3$, (apenas) $J_{ij} \longmapsto (J_x, J_y, J_z)$

$\mathfrak{so}(1,3)$: $[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = \eta J + \eta J - \eta J - \eta J$

↳ completar com os índices para que sejam antissimétricas as trocas $\begin{cases} \mu \leftrightarrow \nu \\ \rho \leftrightarrow \sigma \\ \mu\nu \leftrightarrow \rho\sigma \end{cases}$

- $[J_{0i}, J_{0j}] = \alpha\, \eta_{00} J_{ij}$
- $[P_\mu, P_\nu] = 0$ → geradores de translação
- $[J_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta P - \eta P$

→ álgebra de Poincaré

—— // ——

Para curiosos : 1) L. Alvarez - Gaumé + Hassan "Pedagogical review of Seiberg - Witten ..."

2) "de Rham cohomology"

3) simetria dualidade - S — 4D : $F_{\mu\nu}$ $\tilde{F}_{\mu\nu}$; 10D : $F_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}$ $\tilde{F}_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}$

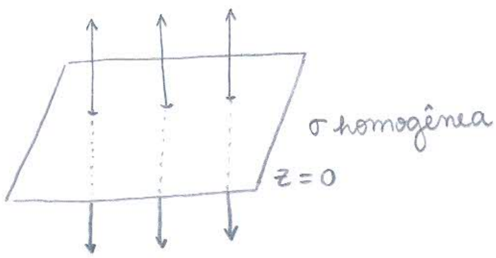
↓

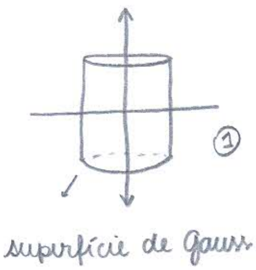
cria vínculos para resolver teorias.

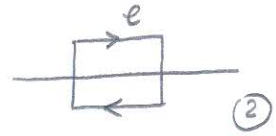
—— // ——

Voltando à matéria da prova :

Descontinuidade (Griffiths 2.3.5.)







$$\begin{cases} \vec{E}(z) = E(z)\,\hat{z} \\ E(z) = -E(-z) \end{cases}$$

① $\displaystyle\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{tampas}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(z)A - E(-z)A = 2E(z)A = 4\pi\sigma A$

$$\boxed{\vec{E} = 2\pi\sigma\,\hat{z}}$$

↳ constante

$$\boxed{E(z\to 0^+) - E(z\to 0^-) = 4\pi\sigma}$$ descontinuidade

$$\hat{n}\cdot\vec{E}\big|_+ - \hat{n}\cdot\vec{E}\big|_- = 4\pi\sigma$$

② $\displaystyle\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

$$\hat{n}\times\vec{E}\big|_+ - \hat{n}\times\vec{E}\big|_- = 0$$

normal → descontínua
tangente → contínua

~ acaba aqui a matéria da P1. ~

Potencial Eletrostático

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{cases} \longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

depende da topologia do espaço (em $\mathbb{R}^3$ vale)

ou $E_i = -\partial_i V$

↳ juntaremos ambas para falar de casos em que não há simetria o suficiente

$$\varepsilon_{ijk}\nabla_j E_k = -\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antissimétrico}}\underbrace{\partial_j\partial_i}_{\text{simétrico}} V = 0$$

contraídos

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}V \end{cases} \rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -4\pi\rho}$$ Equação de Poisson

① Carga Puntiforme (caso mais simples)

$$\nabla^2 V = -4\pi Q\, \delta^3(\vec{x})$$

Em $\vec{x} \neq 0$: $\boxed{\nabla^2 V = 0}$ Equação de Laplace

$\rightarrow$ $V \rightarrow$ funções harmônicas

Para resolver, usaremos o ansatz $V = \frac{\alpha}{r}$, α = constante, $\vec{r} = (x, y, z)$

$$\vec{\nabla} r = \hat{r} \quad , \quad \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} V = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r} \Rightarrow \nabla^2 V = -\alpha\left(\frac{\overbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}^{=3}}{r^3} - \frac{3\,\overbrace{\vec{r}\cdot\vec{r}}^{=r^2}}{r^5}\right) = -\frac{3\alpha}{r^3} + \frac{3\alpha}{r^3} = 0 \rightarrow \text{ansatz válido}$$

$$\begin{cases} \rho(\vec{x}) = Q\,\delta^3(\vec{x}) \\ \int_V \rho(\vec{x})\, d^3x = Q \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla^2 V = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} V \\ \int_V \nabla^2 V = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} V = \oint_S \vec{\nabla} V \cdot d\vec{S} \end{cases}$$

$$\int_{S=\partial V} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{S} = -4\pi Q \Rightarrow \text{se } V = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = Q.$$

Então, $\boxed{V = \frac{Q}{r}}$ e $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{Q}{r^2}\hat{r}}$

↑ solução da equação de Laplace

Isso é o exemplo mais simples de **Função de Green** → ou propagador, porque propaga a distribuição de carga para outro lugar

$$\boxed{\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,')}$$

→ espaciais somente
→ vale sempre em eletrostática.
↓ em EM vira D'Alembertiano e inclui o tempo

↓ solução de uma equação de Poisson inhomogênea com delta

$$\boxed{G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 V = -4\pi\rho \\ \nabla^2 G = -4\pi\, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}\,') \end{cases}$$

Suponha $\rho(\vec{r}) \neq 0$ em um volume V

$$\boxed{V(\vec{r}) = -4\pi \int_V d^3r'\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')}$$

variável de integração

verificação

$$\nabla^2 V = \nabla^2_{\vec{r}}\, (-4\pi) \int_V d^3r'\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')$$

entra porque a variável é diferente

$$\nabla^2 V = \cancel{-4\pi} \int_V d^3r' \overbrace{\left[\nabla^2_{\vec{r}}\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')\right]}^{\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')} \rho(\vec{r}\,')$$

$$\boxed{\nabla^2 V = -4\pi\, \rho(\vec{r})} \checkmark$$