4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

8 de agosto de 2017

Observações:
As monitorias ficaram definidas para segundas, 14h-16h, podendo ser "negociadas" por e-mail.
Os requerimentos foram todos aceitos.

Resumo da aula anterior:

1. Unidades gaussianas (CGS);
2. Unidades naturais (com $c = 1$);
3. Análise dimensional.

Formalismo Lagrangeano [2] $\rightarrow$ simetrias do problema são manifestas

Nesse formalismo existe e é possível (e, eventualmente, mais fácil) aplicar um algoritmo para encontrar quantidades conservadas (Teorema de Noether).

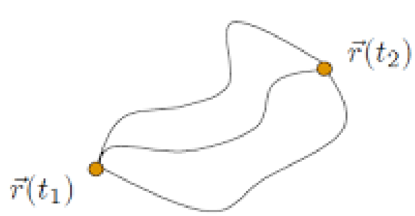

Figura 1: Possíveis caminhos entre dois pontos fixados. A(s) trajetória(s) realizada(s), em mecânica clássica, é/são a(s) que extremiza(m) a ação.

Suponhamos que há uma função (Lagrangeana) que depende explicitamente de $\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)$ da seguinte forma:

$$L(\dot{\vec{r}}(t), \vec{r}(t)) = \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}}(t))^2 - V(\vec{r}(t))$$

Essa não é a forma mais geral da Lagrangeana, mas serve para o que se segue). Define-se o funcional **ação** como:

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\ L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$$

Extremos da ação $\rightarrow$ trajetória da partícula entre t_i e t_f

Um funcional é uma função de funções, levando um subespaço do espaço de funções num subconjunto da reta. Ao extremizarmos a ação, encontra-se o caminho efetivo entre os $\vec{r}(t_i)$ e $\vec{r}(t_f)$ (na lista 1 [1] há um exemplo de sistema onde as soluções do problema de extremização tem mínimos e pontos de sela; veremos esses exercícios na sexta).

Suponhamos agora uma variação infinitesimal do caminho clássico, $\delta\vec{r}(t)$, tal que a variação se anule nas extremidades, *i.e.* $\delta\vec{r}(t_i) = \delta\vec{r}(t_f) = 0$. Extremizar o funcional significa anular a variação δS quando perturbado próximo ao caminho estacionário:

$$\delta S \equiv S[\vec{r}+\delta\vec{r}] - S[\vec{r}] = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{m}{2} \underbrace{(\dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}})^2}_{=\dot{\vec{r}}^2 + 2\dot{\vec{r}}\cdot\delta\dot{\vec{r}} + (\delta\dot{\vec{r}})^2} - \underbrace{V(\vec{r}+\delta\vec{r})}_{=V(\vec{r}) + \vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{r}} - \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{m}{2}(\dot{\vec{r}})^2 - V(\vec{r})\right)$$

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ m\dot{\vec{r}}\cdot\delta\dot{\vec{r}} + \frac{m}{2}(\delta\dot{\vec{r}})^2 - \vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{r}$$

Por outro lado, queremos colocar tudo em termos de uma variação $\delta\vec{r}$, sem dependência na derivada; temos:

$$\dot{\vec{r}}\cdot\delta\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}) - \ddot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}$$

Logo:

$$\delta S = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}\right)}_{=0,\ \text{derivada total}} - \overbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(m\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}V\right)\cdot \underbrace{\delta\vec{r}}_{\text{arbitrária}} + \mathcal{O}[(\delta\dot{\vec{r}})^2]}^{\text{termo de volume}}$$

Para que a ação seja extremizada, deve ser $\delta S \equiv 0$, para qualquer perturbação em torno da solução que a extremiza; como as perturbações são todas arbitrárias, o integrando no termo de volume deve ser identicamente nulo, ou:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V$$

Esta é a **equação de Newton** para o movimento de uma partícula, *i.e.* as trajetórias são aquelas que satisfazem a equação de Newton, para um dado potencial.

Nessa dedução utilizamos uma forma específica da Lagrangeana, mas poderíamos repetir esse procedimento para uma Lagrangeana sem sua dependência funcional especificada. Teríamos:

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \delta L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \delta \vec{r} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta \dot{\vec{r}} \right)$$

Analogamente, para eliminar o termo $\delta\dot{\vec{r}}$ em favor do termo $\delta\vec{r}$, fazemos uma integração por partes e temos:

$$0 = \delta S = \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \cdot \delta \vec{r} \right) \Bigg|_{t_i}^{t_f}}_{=0,\ \text{pois}\ \delta\vec{r}(t_i) = \delta\vec{r}(t_f) = 0} + \int_{t_i}^{t_f} dt\ \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) \cdot \delta \vec{r} + \mathcal{O}[(\delta\dot{\vec{r}})^2]$$

Da mesma forma que no caso anterior, o integrando do termo de volume deve ser identicamente nulo, de modo que:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0$$

Estas são conhecidas como as **Equações de Euler-Lagrange**.

Generalização: no caso de um sistema com mais partículas, haveria um sistema de equações de Euler-Lagrange para cada grau de liberdade (cada partícula). Como o potencial pode depender da interação dessas partículas, esse sistema pode estar "acoplado", e suas equações serem bem difíceis de resolver.

Queremos agora generalizar esse formalismo para campos contínuos. Enquanto partículas caracterizam-se completamente por $\vec{r}, \dot{\vec{r}}$, para campos rebaixamos a posição de "grau de liberdade" a um "parâmetro/variável", *i.e.* $\phi(\vec{r}, t)$.

Intuitivamente, um campo é uma função que depende continuamente na posição e tempo. Campos podem ter vários tipos (escalar, vetorial, tensorial) (e.g.: temperatura, campo de velocidades num fluido, tensor de Faraday). Como escrever uma ação para essa função? Tentemos:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \; dt \; L$$

$$L = \int \; d^3\vec{r} \; \mathcal{L}\left(\phi(\vec{r},t), \frac{\partial \phi}{\partial t}, \vec{\nabla}\phi\right), \nabla\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

Aqui, os graus de liberdade são o campo, e as velocidades são as derivadas dos graus de liberdade com respeito aos parâmetros, em analogia aos casos anteriores para partículas. Para a extremização, temos:

$$0 = \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\vec{r} \; \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi}\delta_\mu \phi\right)$$

Esta é uma introdução heurística de como os princípios para campos podem ser vistos como generalizações dos princípios para partículas, e não é o objetivo esclarecer, pelo menos por ora, como se operam, precisamente, estes símbolos. É um pouco mais sutil a diferença entre os campos e as partículas mas, por enquanto, basta estabelecer estas analogias. De fato, utilizando um análogo à regra de Leibniz, vale:

$$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi}\delta_\mu \phi = \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi}\delta\phi\right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi}\right)\delta\phi$$

Logo:

$$0 = \delta S = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\vec{r} \; \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi}\delta\phi\right)}_{=0,\text{termo de superfície}} - \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3\vec{r} \; \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi}\right)\delta\phi}_{\text{termo de volume}}$$

O argumento para justificar o porquê do termo de superifície ter de ser zero reside no fato de que esta é a integral de um divergente, e a intuição física nos diz que os campos devem ir a zero no infinito; assim, a integral na "fronteira" (o infinito) se anula, restando apenas a integral do termo de volume. Raciocinando de maneira análoga aos casos anteriores, o integrando deve ser identicamente nulo, para que esta igualdade valha para qualquer perturbação $\delta\phi$. Temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \; \partial_\mu \phi} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)}\right)$$

O sinal negativo na primeira derivada (em vermelho) será justificado mais para frente, e tem ligação com a métrica de Minkowski do espaço-tempo plano. Estas são as **equações de Euler-Lagrange para campos contínuos**, em um espaço-tempo de quatro-dimensões, com uma métrica fixada.

Simetrias

Examinemos a Lagrangeana da partícula livre, nomeadamente:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$$

Estudemos as simetrias dessa Lagrangeana. De fato, se adicionássemos um vetor constante a $\dot{\vec{r}}(t)$, sua derivada temporal ainda seria a mesma, de modo que o sistema exibe **simetria de translação**. De maneira análoga, qualquer transformação que mantivesse o comprimento ao quadrado do vetor velocidade $v^2 = \dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ invariante sob mudança de referencial, deixaria a Lagrangeana invariante; portanto, esta exibe **simetria de rotação** (para o vetor velocidade). Construiremos essas rotações ais para frente. Outras simetrias são as de **paridade espacial** ($\vec{r} \leftrightarrow -\vec{r}$), **paridade temporal** ($t \leftrightarrow -t$) etc.

Analisemos agora o que acontece com essa Lagrangeana (e sua ação) para as **transformações de Galileu**, em dois referenciais inerciais, Alice e Bob, com Bob se movendo com velocidade v para a direita ao longo do eixo X em relação a Alice (vamos definir $\vec{v} = (v, 0, 0)$).

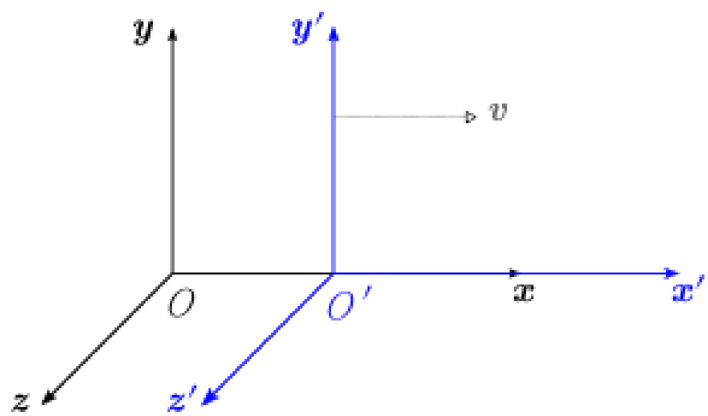

Figura 2: Par de referenciais inerciais; à esquerda, Alice, à direita, Bob.

Sejam dois eventos, cujas posições e instantes de tempos foram medidos em ambos referenciais, de modo a poderem ser calculadas, em cada referencial, as diferenças (temporal e espacial) entre as posições inicial e final do evento. As transformações de Galileu são as que satisfazem:

$$\begin{cases} \Delta t_A = \Delta t_B \\ \Delta x_A = \Delta x_B + v\Delta t_A \\ m_A = m_B \end{cases}$$

Podemos entender, agora, o que acontece com as equações de movimento em cada sistema de coordenadas. A Lagrangeana da partícula livre implica nas seguintes equações de movimento:

$$\begin{cases} m_A \frac{d^2}{dt_A^2} x_A = 0 \\ m_B \frac{d^2}{dt_B^2} x_B = \underbrace{m_A \dfrac{d^2}{dt_A^2}(x_A + v t_A)}_{\text{tempo e massa absolutos}} = m_A \frac{d^2}{dt_A^2} x_A = 0 \end{cases}$$

Pois a derivada segunda de $x_B = x_A + v t_A$ é a mesma que a de x_A. Logo, as equações de movimento são invariantes sob mudança de referencial inercial. Isso se deve ao fato de que não temos $v = v(t)$ *i.e.*, os referenciais são inerciais e não surgem novos termos devido à aceleração relativa entre eles. De um modo geral, conclui-se que as equações de Newton são invariantes sob transformações de Galileu. Para a ação teríamos:

$$S_B = \int dt_B \, \frac{m_B}{2}(\dot{\vec{r_B}})^2 = \int dt_A \, \frac{m_A}{2}(\dot{\vec{r_A}}+\vec{v})^2 = \int dt_A \, \frac{m_A}{2}[(\dot{\vec{r_A}})^2+2(\dot{\vec{r_A}}\cdot\vec{v})+(\vec{v})^2] =$$

$$S_B = S_A + \underbrace{\int dt_A \, \frac{m_A}{2}[2(\dot{\vec{r_A}} \cdot \vec{v}) + v^2]}_{\text{constante}}$$

Para ver o porquê deste termo ser constante, basta lembrarmos que v^2 é uma constante (os referenciais são inerciais) e a trajetória da partícula não tem aceleração (partícula livre), logo se move com $\dot{\vec{r_A}} = \vec{v'}$ constante, e seu produto escalar com $\vec{v}$ também é constante; mais geralmente, é possível escrever este termo como uma diferencial total no tempo, igualando-o , de qualquer forma, a uma constante arbitrária, sem necessidade de especificar a forma da Lagrangeana. Como potenciais estão definidos a menos de uma constante, essa constantes podem ser "incorporadas" no potencial, de modo que o "nível zero" é a única coisa que muda entre as ações em cada referencial.

Próximas aulas:

- Passar mais tempo estudando notação;
- Substituir as transformações de Galileu pelas tranformações de Lorentz;
- Discutir rotações;
- Construir uma Lagrangeana para partículas relativísticas.

Referências

[1] Diego Trancanelli. Revisão de Mecânica - Lista 1. 2017. Lista 1.

[2] IPTV USP. Convite à Física: “O Mínimo Teórico: Mecânica Clássica”. 2017. Convite à Física: “O Mínimo Teórico: Mecânica Clássica”.