4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

11 de agosto de 2017

Resolução dos exercícios da lista 1[2]:

(a) A Lagangeana do oscilador harmônico de frequência ω e sua ação são [1]:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$S[x] = \int_0^{t_f} dt \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)$$

(b) A variação da ação é dada por[2]:

$$\Delta S[\delta x] \equiv S[x+\delta x] - S[x] = \frac{m}{2}\int_0^{t_f} dt \ \left(2\dot{x}\delta\dot{x} + \delta\dot{x}^2 - \omega^2 2x\delta x - \omega^2\delta x^2\right)$$

Integrando por partes e rearranjando os termos adequadamente:

$$\Delta S[\delta x] = \frac{m}{2}\int_0^{t_f} dt \ \left(\delta\dot{x}^2 - \omega^2\delta x^2\right) + m\int_0^{t_f} dt \ \left(-\ddot{x} - \omega^2 x\right)\delta x$$

A segunda integral, "na camada de massa" (*on-shell*, *i.e.* impostas as equações de movimento), é zero, pois a função $x(t)$ é solução de $\ddot{x} = -\omega^2 x$.

(c) Seja $x(t)$ uma função que extremiza a ação, α um número real suficientemente pequeno e $y(t)$ uma função arbitrária (diferenciável), com $y(0) = y(t_f) = 0$. Identificando $\delta x(t) = \alpha y(t)$, então[3]:

$$\Delta S[\alpha y(t)] = \frac{m\alpha^2}{2}\int_0^{t_f} dt \ \left(\dot{y}^2 - \omega^2 y^2\right)$$

[1]Resolução de Francisco Maion.
[2]Resolução do professor.
[3]Resolução do redator destas notas.

Escrevendo $y(t)$ em sua série de Fourier, teríamos:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ sen\left(\frac{n\pi t}{t_f}\right), \ c_n = \frac{2}{t_f}\int_0^{t_f} dt \ y(t) \ sen\left(\frac{n\pi t}{t_f}\right)$$

É possível escrever $y(t)$ como uma série só de senos devido ao fato de que a perturbação é diferenciável e satisfaz um problema de Sturm-Liouville com condições de fronteira de Dirichlet. Definindo esses modos como $\delta_n x(t) \doteq sen(\omega_n t)$, onde $\omega_n \doteq \frac{n\pi}{t_f}$, vem:

$$\delta x(t) = \alpha y(t) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ \delta_n x(t)$$

(d) Ao especificarmos $y(t)$ como o limite no número de termos de seu somatório, podemos calcular explicitamente seu quadrado (e o de sua derivada):

$$\begin{cases} y(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \ sen\left(\omega_n t\right) \\ y^2(t) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} c_n^2 \ sen^2\left(\omega_n t\right) + 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n-1} c_n c_m sen\left(\omega_n t\right) sen\left(\omega_m t\right)\right] \\ \dot{y}(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \omega_n c_n \ cos\left(\omega_n t\right) \\ \dot{y}^2(t) = \lim_{N\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \omega_n^2 c_n^2 \ cos^2\left(\omega_n t\right) + 2\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{n-1} \omega_n\omega_m c_n c_m cos\left(\omega_n t\right) cos\left(\omega_m t\right)\right] \end{cases}$$

Ao substituirmos estas expressões em $\Delta S[\alpha y(t)]$, a integral em $[0, t_f]$ dos produtos de senos e cossenos de frequências diferentes (termos cruzados, com $m < n$) se anula, restando:

$$\Delta S[\alpha y(t)] = \frac{m\alpha^2}{2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \int_0^{t_f} dt \ \left[\omega_n^2 cos^2\left(\omega_n t\right) - \omega^2 sen^2\left(\omega_n t\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta S\left[\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_n x\right] = \frac{m\alpha^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \frac{t_f}{2}(\omega_n^2 - \omega^2) \\ \Delta S\left[\alpha c_p \delta_p x\right] = \frac{m\alpha^2}{2} c_p^2 \frac{t_f}{2}(\omega_p^2 - \omega^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} \Delta S\left[\alpha c_p \delta_p x\right] = \Delta S\left[\alpha \sum_{p=1}^{\infty} c_p \delta_p x\right]$$

A segunda igualdade na chave é o mesmo que considerar $c_n = 0, \forall n \neq p$. Em particular, quando $\alpha = 1$ e a função $y(t)$ já for suficientemente pequena (em módulo), podemos considerá-la a própria perturbação da solução $x(t)$, e temos:

$$\sum_{p=1}^{\infty} \Delta S\left[c_p \delta_p x\right] = \Delta S\left[\sum_{p=1}^{\infty} c_p \delta_p x\right]$$

(e) O análogo à derivada segunda do funcional da ação, ora menor que zero, ora maior que zero, determina trajetórias que são de sela ou de mínimo, respectivamente. Mostra-se que a condição para que essas situações ocorram são:

i

$$0 \leq t_f \leq \frac{\pi}{\omega}, \Delta S\left[\delta_n x\right] > 0, \forall n = 1, 2...$$

ii

$$\frac{\pi}{\omega} \leq t_f \leq \frac{2\pi}{\omega}, \Delta S\left[\delta_n x\right] < 0, n = 1; \Delta S\left[\delta_n x\right] > 0, n > 1$$

> **Observação**: Eventual mudança na data da prova, para antecipá-la ao trancamento de matrícula, a ser discutida.

Rotações

Quando se fala em grandezas do tipo escalar, vetorial etc. é necessário especificar **sob quais transformações** essas grandezas o são (respectivamente, escalar, vetorial etc.). Por exemplo:

$$\begin{cases} \text{escalar (sob rotações);} \\ \text{vetor (sob rotações);} \\ \text{tensor (sob rotações).} \end{cases}$$

Dessa forma, as qualidades dessas quantidades (ser escalar, ser vetorial etc.) são definidas **pelas propriedades de transformação**. Teríamos, portanto, algo como:

"Um vetor é algo que se transforma como um vetor".

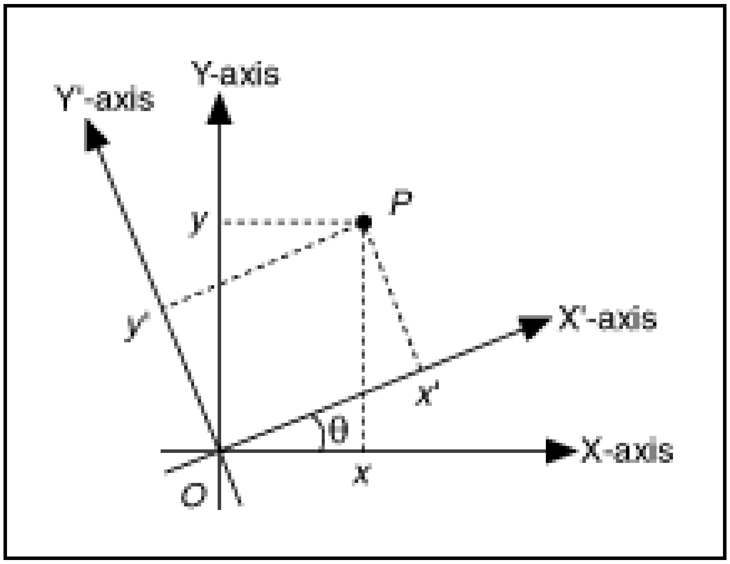

Figura 1: <u>2D</u> - par de sistemas de coordenadas rotacionados um do outro.

Podemos definir, como na figura, uma transformação passiva (*i.e.* uma transformação do referencial com O fixo), dada pela matriz:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\ \theta & sen\ \theta \\ -sen\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$$

$$x^{i'} = \sum_{j=1}^{2} R^{ij} x^j = R^{ij} x^j$$

Adota-se aqui a **convenção de Einstein** sobre índices repetidos na última igualdades; o índice j é dito "mudo", pois é uma variável que apenas "conta" as componentes.

Gostaríamos que essas transformações tivessem certas propriedades para que pudéssemos chamá-las de rotações, como conservar a norma após a aplicação das mesmas, isto é:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x'} \cdot \vec{x'} \Rightarrow x^i\ ' x^i\ ' = (R^{ij} x^j)(R^{ik} x^k) = R^{ij} R^{ik} x^j x^k = x^j x^j = \delta^{jk} x^j x^k$$

$$\Rightarrow R^{ij} R^{ik} = \delta^{jk} = (R^T)^{ji} R^{ik} = \delta^{jk} \Rightarrow R^T R = \mathbf{1}$$

A segunda igualdade da linha de baixo é escrita para que associemos a equação a um produto de matrizes.

Definição: Uma transformação ortogonal R, D-dimensional ($R \in O(D)$), é uma transformação linear que satisfaz:

$$R^{ij}R^{ik} = \delta^{jk} = (R^T)^{ji}R^{ik} = \delta^{jk} \text{ ou } R^TR = \mathbf{1}$$

Para transformações desse tipo, vale:

$$\begin{gathered} det(R^TR) = det(\mathbf{1}) \\ [det(R^T)][det(R)] = 1 \\ [det(R)][det(R)] = 1 \\ [det(R)]^2 = 1 \\ det(R) = \pm 1 \end{gathered}$$

Ao subgrupo de determinante $+1$ dá-se o nome de $SO(D)$, o **grupo ortogonal especial** (*special orthogonal*):

$$SO(D) : \begin{cases} R^TR = \mathbf{1} \\ det(R) = 1 \end{cases}$$

Sob essas transformações, definimos:

1. **Escalar** - algo que não se transforma (sob rotações).
2. **Vetor** - algo que se transforma como:

   $$V^i \to V^{i'} = R^{ij}V^j$$

3. **Tensor** - algo que se transforma como (no caso especifico de um tensor de **posto/ordem 2**):

   $$W^{ij} \to W^{ij\ \prime} = R^{ik}R^{jl}W^{kl}$$

   Ou (no caso especifico de um tensor de **posto/ordem 3**):

   $$X^{ijk} \to X^{ijk\ \prime} = R^{im}R^{jn}R^{kl}X^{mnl}$$

   E assim por diante.

Exercícios:

1. Em $D=2$, onde $\vec{p}=(p_1,p_2)$ é um vetor sob $SO(2)$, $\vec{q}=(ap_1,bp_2)$ $(a,b\in\mathbb{R})$ é vetor?
2. Em $D=3$, onde $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$ e $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3)$ são vetores sob $SO(3)$, $\vec{r}=(p_2q_3,p_3q_1,p_1q_2)$ é vetor? Complemente-o para que vire um vetor.

   Dica: $\vec{r}=(p_2q_3-q_2p_3,p_3q_1-q_3p_1,p_1q_2-q_1p_2)$ é vetor (sob $SO(3)$).
3. Demonstre que δ^{ij} é invariante sob $SO(D)$.
4. Demonstre que $\epsilon^{i_1\dots i_D}$ (o **símbolo de Levi-Civita**) é invariante sob $SO(D)$.

   Obs.: O símbolo de Levi-Civita, para dimensões $D=2$ e $D=3$ tem suas componentes dadas por:

$$\epsilon^{12}=-\epsilon^{21}=1,\epsilon^{11}=\epsilon^{22}=0$$

$$\epsilon^{123}=\epsilon^{231}=\epsilon^{312}=1,\epsilon^{132}=\epsilon^{321}=\epsilon^{213}=-1,$$

$$\epsilon^{ijk}=0,\text{caso contrário}$$

Examinemos mais de perto o caso dos tensores de ordem 2, para $D=3$:

$$W^{ij}\to W^{ij\,\prime}=R^{ik}R^{jl}$$

$$i=j=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W^{11\,\prime}=R^{1k}R^{1l}W^{kl}=R^{11}R^{11}W^{11}+R^{11}R^{12}W^{12}+R^{11}R^{13}W^{13}+R^{12}R^{11}W^{21}+...+R^{13}R^{13}W^{33}$$

Se associássemos uma D^2-upla à matriz que representa W (a qual é só um conjunto de n número, não necessariamente um vetor!) da seguinte forma:

$$W=\begin{bmatrix}W^{11} & W^{12} & W^{13}\\ W^{21} & W^{22} & W^{23}\\ W^{31} & W^{32} & W^{33}\end{bmatrix}\to W=(W^{11},W^{12},W^{13},W^{21},W^{22},W^{23},W^{31},W^{32},W^{33})$$

Poderíamos escrever a transformação que leva W^{ij} em $W^{ij\,\prime}$ da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}W^{11\,\prime}\\ W^{12\,\prime}\\ \vdots\\ W^{33\,\prime}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R^{11}R^{11} & R^{11}R^{12} & \dots & R^{13}R^{13}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}_{(9\times 9)}\begin{bmatrix}W^{11}\\ W^{12}\\ \vdots\\ W^{33}\end{bmatrix}$$

Esta matriz 9×9 é uma **representação redutível** 9-dimensional de $SO(3)$, *i.e.*, pode ser decomposta[4]. Neste contexto, redutível quer dizer que algumas combinaçõesdos W^{ij} se transformam somente entre elas. Por exemplo, consideremos o tensor formado por:

$$A^{ij} \equiv W^{ij} - W^{ji}, A^{ij} = -A^{ji} \text{ (antissimétrico)}$$
$$A^{ij\ \prime} = W^{ij\ \prime} - W^{ji\ \prime} = R^{ik}R^{jl}W^{kl} - R^{jk}R^{il}W^{kl}$$

Os índices k e l são mudos; trocando um pelo outro no segundo termo da última igualdade:

$$A^{ij\ \prime} = R^{ik}R^{jl}W^{kl} - R^{jl}R^{ik}W^{lk} = R^{ik}R^{jl}(W^{kl} - W^{lk}) = R^{ik}R^{jl}A^{kl} =$$

Portanto, a transformação de um tensor antissimétrico é ele mesmo antissimétrico. No caso de $D = 3$ há três componentes independentes em uma matriz 3×3, como A^{12}, A^{13}, A^{23}, por exemplo (a transposição tem sinal trocado, e a diagonal é nula, logo a matriz fica completamente definida a partir dessas componentes).

Exercício:

5. Mostre que o tensor:

$$S^{ij} = \frac{A^{ij} + A^{ji}}{2}, S^{ij} = S^{ji} \text{ (simétrico)}$$

só se transforma em outros tensores também simétricos.

Podemos demonstrar que $S^{ij\ \prime} = R^{ik}R^{jl}S^{kl}$ é redutível, ao separarmos o conjunto dos tensores simétricos entre aqueles de **traço nulo** e de traço não-nulo; de fato, como o traço é um invariante sob mudança de sistema de coordenadas, é de se esperar que tensores de traço nulo se transformem apenas em tensores de traço nulo. De fato:

$$S^{ii} = \sum_i S^{ii}$$
$$S^{ii\ \prime} = \underbrace{R^{ij}R^{ik}}_{=\delta^{jk}} S^{jk} = S^{kk}$$

Define-se um tensor sem traço, a partir de um tensor simétrico, em termos da dimensão D de $SO(D)$:

$$\tilde{S}^{ij} = S^{ij} - \frac{\delta^{ij}}{D} S^{kk} \text{ (simétrica sem traço)}$$

[4]Nota do redator: a matriz de representação é o produto direto de matrizes, ou produto de Kronecker[1].

Para mostrar que esse tensor é sem traço, basta calculá-lo:

$$Tr(\tilde{S}^{ij}) = \sum_i \tilde{S}^{ii} = \delta^{ij}\tilde{S}^{ij} = \delta^{ij}S^{ij} - \delta^{ij}\frac{\delta^{ij}}{D}S^{kk} = S^{ii} - \frac{D}{D}S^{kk} = 0$$

Na representação 9-dimensional de $SO(3)$, portanto, pode-se separar as matrizes em antissimétricas $A^{ij}(3)$ (que dependem de três parâmetros, como A^{12}, A^{13}, A^{23}), as simétricas de traço nulo $\tilde{S}^{ij}(5)$ (que dependem de cinco parâmetros, os três elementos da matriz triangular superior, e dois elementos da diagonal principal, pois o terceiro elemento da diagonal fica determinado ao forçarmos traço zero), e as simétricas de traço distinto de zero $S^{ij}(1)$ (que tem dimensão um porque são uma cópia das matrizes simétricas de traço zero, com o parâmetro que dá valor zero ao traço sendo variado continuamente). De outra forma, a representação 9-dimensional se escreve como $\underline{9} = \underline{3} \bigoplus \underline{5} \bigoplus \underline{1}$ e existe uma transformação de similaridade que leva o produto direto de matrizes de rotação (a representação redutível) em uma matriz bloco-diagonalizada, da forma:

$$R^{ij} \bigotimes R^{kl} \rightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} 3\times 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5\times 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1\times 1 \end{array}\right]_{(9\times 9)}$$

Mais geralmente, tem-se $\underline{D^2} = \underline{\frac{D(D-1}{2}} \bigoplus \underline{\frac{D(D+1}{2} - 1} \bigoplus \underline{1}$. A **Tab. 1** nos diz algo de importante acerca do número de **geradores da Álgebra de Lie** $\mathfrak{so}(D)$.

Tabela 1: Número de geradores do subespaço de matrizes antissimétricas de $SO(D)$.

D	$\mathbf{\frac{D(D-1)}{2}}$
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

De fato, em duas dimensões, a matriz $R(\theta)$ dos exemplos anteriores é suficiente para produzir todas rotações nesse espaço; aproximando-a em primeira ordem:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\ \theta & sen\ \theta \\ -sen\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = I_2 + \theta J$$

A matriz J (antissimétrica) é dita o gerador de rotações infinitesimais em duas dimensões. Analogamente, uma base para o conjunto de matrizes antissimétricas em $SO(3)$ é:

$$J_x = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Estas matrizes são as geradoras de rotações infinitesimais no sentido de que:

$$R(\theta_x, \theta_y, \theta_z) \approx I_3 + \theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z$$

Num espaço-tempo quadridimensional, haverá seis geradores, que são interpretados como as rotações em relação a uma reta ortogonal ao plano determinado por dois eixos (variáveis) independentes; três desses geradores são rotações intrinsecamente tridimensionais, enquanto as outras três são consideradas ***boosts***.

Referências

[1] Kronecker product - Wikipedia. Kronecker product.

[2] Diego Trancanelli. Revisão de Mecânica - Lista 1. 2017. Lista 1.