

4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

15 de agosto de 2017

Vamos entender as consequências de $c = \text{const.}$ ($= 1$). Suponhamos o seguinte experimento mental, no qual há dois espelhos, postos a uma distância L , paralelos um ao outro, e um feixe de *laser* que é emitido e reflete no espelho oposto. Há (pelo menos) dois referenciais, Alice (A) e Bob (B), B com velocidade u constante em relação a A ; usaremos a hipótese de que a velocidade da luz é constante dizendo que $c_A = c_B = c$. Para que o feixe seja emitido, refletido e volte ao emissor gasta-se um tempo, e pode haver uma distância entre pontos final e inicial da trajetória do feixe; no referencial A a medição nos fornece:

$$\Delta x_A = \Delta y_A = \Delta z_A = 0$$

$$\Delta t_A = \frac{2L}{c_A} = \frac{2L}{c} \text{ (eq. 1)}$$

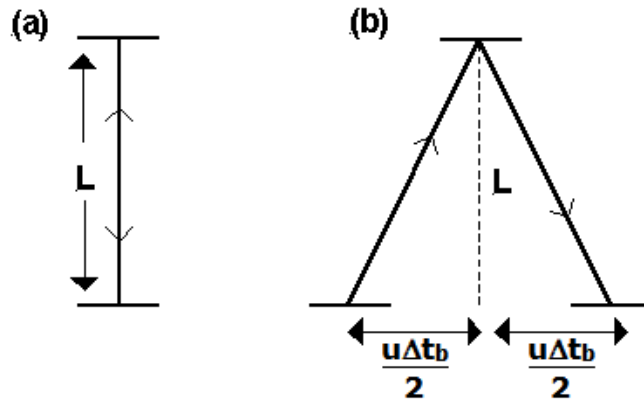


Figura 1: Experimento nos referenciais inerciais A e B , onde consideramos B em movimento relativo a A .

Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras, a medição nos dá os resultados em B como:

$$\Delta y_B = \Delta z_B = 0, \Delta x_B = u\Delta t_B$$

$$c_B\Delta t_B = 2\sqrt{\left(\frac{u\Delta t_B}{2}\right)^2 + L^2} \Rightarrow (c\Delta t_B)^2 = 4\frac{(u\Delta t_B)^2}{4} + \underbrace{4L^2}_{=(c\Delta t_A)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2\Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 = c^2\Delta t_A^2}$$

Onde usou-se a **Eq. 1** na penúltima passagem. Por simetria (e/ou por uma mudança de base) podemos “adicionar os zeros” (as variações nulas $\Delta y = \Delta z = 0$) e obtermos:

$$\boxed{c^2\Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 - \Delta y_B^2 - \Delta z_B^2 = c^2\Delta t_A^2 - \Delta x_A^2 - \Delta y_A^2 - \Delta z_A^2}$$

Notemos que, para rotações, valia:

$$(\Delta\vec{r})^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \text{const. sob rotações}$$

Busquemos a generalização das transformações de Galileu. Quais seriam elas? Devemos estendê-las aos **boosts de Lorentz**. Consideremos os subespaços para os quais vale:

$$c^2\Delta t_B^2 - \Delta x_B^2 = c^2\Delta t_A^2 - \Delta x_A^2 \text{ (finita) ou}$$

$$c^2dt_B^2 - dx_B^2 = c^2dt_A^2 - dx_A^2 \text{ (infinitesimal)}$$

Trocaremos ainda, na última igualdade, os sinais (esta é uma escolha arbitrária, dita convenção de sinais, que varia entre as diversas áreas de estudo):

$$-c^2dt_B^2 + dx_B^2 = -c^2dt_A^2 + dx_A^2$$

Definamos agora as coordenadas do **cone de luz**:

$$\begin{cases} dX_B^+ = dx_B + cdt_B \\ dX_B^- = -dx_B + cdt_B \end{cases} \Rightarrow -c^2dt_B^2 + dx_B^2 = dX_B^+dX_B^- = dX_A^+dX_A^- = -c^2dt_A^2 + dx_A^2 \text{ (eq. 2)}$$

Onde impusemos que $dX_B^+dX_B^- = dX_A^+dX_A^-$. Que transformações entre os dX_B e dX_A tornariam a **Eq. 2** válida? Certamente esta é uma delas:

$$\begin{cases} dX_B^+ = e^\phi dX_A^+ \\ dX_B^- = e^{-\phi} dX_A^- \end{cases} \quad \phi \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cdt_B = \frac{dX_B^+ + dX_B^-}{2} = \frac{e^\phi dX_A^+ + e^{-\phi} dX_A^-}{2} = (\cosh \phi)(cdt_A) + (\sinh \phi)(dx_A) \\ dx_B = \frac{dX_B^+ - dX_B^-}{2} = (\sinh \phi)(cdt_A) + (\cosh \phi)(dx_A) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} cdt_B \\ dx_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi \\ \sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cdt_A \\ dx_A \end{pmatrix}$$

Retornando momentaneamente na definição de rotações de $SO(3)$, comparemos as diferenças dessas transformações com as que acabamos de deduzir (olhando para um subespaço bidimensional):

- Simétrica, com funções trigonométricas hiperbólicas **vs.** Antissimétrica, com funções trigonométricas;
- $dt_B \neq dt_A$ **vs.** transformações de Galileu ($dt_B = dt_A$);

É possível calcular como ϕ depende de u . De fato:

$$\begin{cases} dx_B = 0 \Rightarrow dx_A = -u dt_A \text{ (velocidade negativa na mudança de referencial de B para A)} \\ dx_B = 0 \Rightarrow (\cosh \phi)(dx_A) = (-\sinh \phi)(cdt_A) \end{cases}$$

Para que valham simultaneamente é necessário que:

$$\frac{u}{c} = \tanh \phi$$

Do exposto, a adição de velocidades (com $c = 1$) se calcula como:

$$v_B = \frac{dx_B}{dt_B} = \frac{dx_A + u dt_A}{dt_A + u dx_A} = \frac{\frac{dx_A}{dt_A} + u}{1 + u \frac{dx_A}{dt_A}} = \frac{v_a + u}{1 + uv_a} \neq v_a + u$$

Exercício: deduzir esta equação de adição de velocidades para $c \neq 1$.

Até então passamos de $(d\vec{r})^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, invariante sob rotações de $SO(3)$, à quantidade $ds^2 \equiv -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, invariante sob **transformações de Lorentz** (com grupo denotado $SO(1,3)$). Essa transformação preserva o **elemento de linha** com **um** sinal $(-)$, que representa a **separação** entre dois eventos no espaço-tempo (em alemão, Zaum=Zeit+Raum). Analisemos de perto as consequências desse sinal $(-)$, lembrando que ds^2 é só uma notação e não significa que essa quantidade deva ser positiva. Classifica-se a separação entre eventos como:

$$ds^2 \begin{cases} > 0, \text{ tipo espaço} \\ = 0, \text{ tipo luz} \\ < 0, \text{ tipo tempo} \end{cases}$$

Exemplo ($c = 1$):

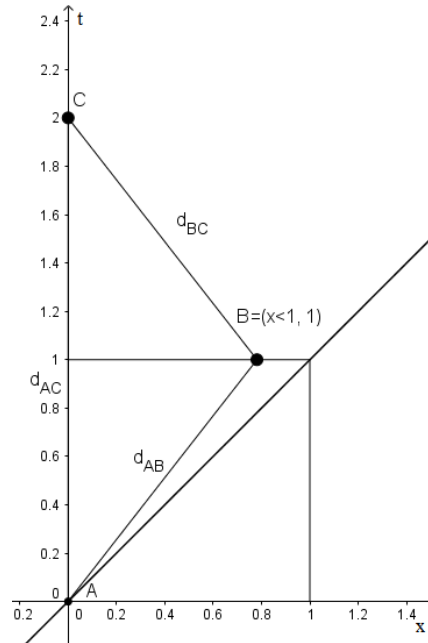


Figura 2: Representação de dois eventos no espaço-tempo.

Qual a trajetória com menor ds^2 , de A a C? temos:

$$d_{AC} = \sqrt{2^2 - 0^2}, d_{AB} = d_{BC} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$d_{AB} + d_{BC} = 2\sqrt{1 - x^2} < 2 = d_{AC}, v \rightarrow 1 \Rightarrow d_{AB} = d_{BC} = 0$$

Esse é nosso primeiro contato com essa “linha de 45°”. Vejamos:

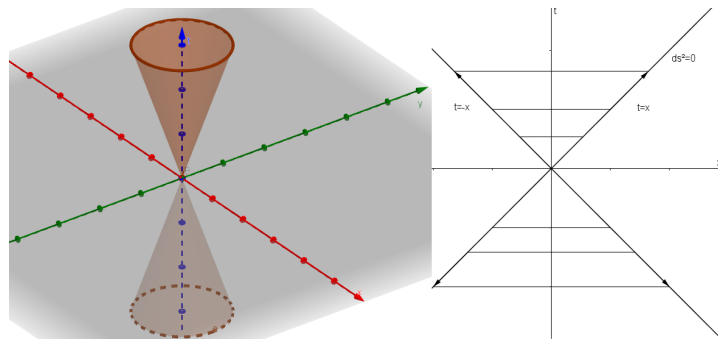


Figura 3: O interior do cone (no espaço e no plano) representa os eventos que podem ter relação de causalidade uns com os outros, com $u \leq c$.

O cone de luz é o local geométrico dos eventos que possuem $ds^2 = 0 \Rightarrow c^2 dt^2 = dx^2 \Rightarrow v^2 = c^2$, isto é, dos eventos cuja separação é do tipo luz. Seu interior é constituído por eventos de tipo tempo, com $u \leq c$.

Traça-se o cone de luz de uma partícula num dado instante, e sua trajetória permanece sempre dentro do cone de luz, pois o tipo de separação é invariante por mudança de referencial; localmente, no entanto, as curvas que descrevem a trajetória dessa partícula no espaço-tempo (ditas **linhas de mundo**) têm tangentes que fazem ângulos maiores que 45° com o eixo/plano das posições ($u \leq c$ em todo ponto, e futuro e passado da curva relacionados dentro de cada cone de luz local). Esses diagramas são úteis para entender relações de causalidade; no diagrama a seguir os dois eventos não se encontram espacialmente (espaço-temporalmente) conectados, mas podem vir a estar futuramente. No movimento newtoniano, onde $c \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$ e o cone de luz “se abre”, e todos eventos se encontram em contato causal, campos se propagam instaneamente etc.

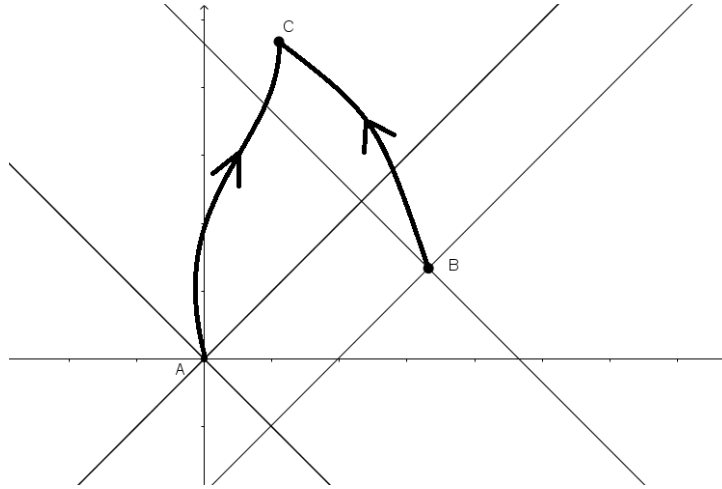


Figura 4: Os eventos A e B não têm relação causal, mas podem vir a ter relação causal com um terceiro evento C , no interior dos cones de luz de ambos eventos A e B .

Notação (relativa às transformações de Lorentz):

Para **rotações** ($SO(3)$) temos $dx^i \rightarrow dx^{i' } = R^{ij} dx^j = R_j^i dx^j, R^T R = \mathbf{1}, \det R = 1$; um análogo ao elemento de linha é:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = (dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}$$

Para vetores sob a transformação de Lorentz denotaremos suas componentes da **parte espacial** por índices latinos, e o quadrivetor completo por índices gregos:

$$dx^i = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

$$dx^\mu = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Esse vetor é definido com índice em cima, e dito **contravariante** (vetor sob transformação de Lorentz $\Lambda_\nu^\mu \in SO(1, 3)$). A quantidade que se torna invariante sob a transformação $dx^\mu \rightarrow dx^{\mu'} = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu$ é ds^2 , que pode ser escrita como:

$$ds^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} dx^0 & dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}}_{=\eta_{\mu\nu}}$$

Se μ e ν denotam os índices de linha e coluna da matriz, a matriz $\eta_{\mu\nu}$ é dita **métrica de Minkowski**. Define-se $dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu$, dito **covariante**, de modo que $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$. O cálculo simples de dx_μ nos dá:

$$dx_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\nu \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \Rightarrow dx_0 = -dx^0 = -cdt \\ \mu = i = 1, 2, 3 \text{ (espaço)} \Rightarrow dx_\mu = dx^i \end{cases} \Rightarrow dx^\mu = (ct, \vec{x}) \rightarrow dx_\mu = (-ct, \vec{x})$$

Procuramos agora condição análoga à do produto pela transposta e do determinante, para a matriz de transformação de Lorentz, lembrando que a **contração** de um vetor covariante com um contravariante (análogo ao elemento de linha) fornece um invariante de Lorentz:

$$\begin{cases} V^\mu V_\mu = V^\mu V^\nu \eta_{\mu\nu} \\ V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda_\nu^\mu V^\nu \end{cases} \Rightarrow V^\mu V^\nu \eta_{\mu\nu} = V^\mu V_\mu = V^{\mu'} V_{\mu'} = (\Lambda_\rho^\mu V^\rho)(\Lambda_\sigma^\nu V^\sigma) \eta_{\mu\nu} = \Lambda_\rho^\mu \Lambda_\sigma^\nu \eta_{\mu\nu} V^\rho V^\sigma$$

Fazendo as trocas entre índices mudos $\mu \leftrightarrow \rho$ e $\nu \leftrightarrow \sigma$, e argumentando que os vetores são arbitrários:

$$V^\mu V^\nu \eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} V^\mu V^\nu \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\rho \eta_{\rho\sigma} \Lambda_\nu^\sigma = (\Lambda^T)_\rho^\mu \eta_\sigma^\rho \Lambda_\nu^\sigma \Rightarrow \boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta}$$

A última igualdade utiliza propriedades do produto de matrizes, e que a inversa da métrica de Minkowski é ela mesma. Tomando determinantes, chega-se a $\det \Lambda = \pm 1$; há vantagens em considerar o seguinte grupo de matrizes (**ortócronas próprias**):

$$\Lambda \in SO^+(1, 3) \begin{cases} \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \\ \det \Lambda = 1 \\ \Lambda_{00} > 0 \end{cases}$$

Exercício: Demonstrar que $\det \Lambda = +1 \Rightarrow d^4x = d^4x'$, isto é, a medida de integração $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ no espaço-tempo de Minkowski é invariante sob transformações de Lorentz. (Importante para definir ação da Lagrangeana relativística).