4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

18 de agosto de 2017

Revisão:

Para o grupo de rotações $SO(1,3)$ valia:

$$X^\mu = (ct \equiv x^0, x^1, x^2, x^3) \to \text{contravariante}$$

$$\begin{gathered} X_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (\eta_{0\nu} x^\nu, \eta_{1\nu} x^\nu, \eta_{2\nu} x^\nu, \eta_{3\nu} x^\nu) = \\ = \underbrace{(-x^0, x^1, x^2, x^3)}_{\eta = diag(-1,1,1,1)} \doteq (x_0, x_1, x_2, x_3) \to \text{contravariante} \end{gathered}$$

$$\begin{cases} x_i = x^i (i = 1,2,3) \\ x_0 = -x^0 = -ct \end{cases}$$

$$X^\mu X_\mu = X^\mu X^\nu \eta_{\mu\nu} \to \text{invariante}$$

Mais geralmente, temos $V^\mu W_\mu$ invariante sob $SO(1,3)$ (V e W vetores covariante e contravariante sob $SO(1,3)$). A métrica $\eta_{\mu\nu}$ é usada como protótipo para rebaixar $V^\mu \mapsto V_\mu$, onde o vetor era nosso objeto inicial; no entanto, é possível defini $\eta^{\mu\nu}$ como aquele tensor que satisfaz $V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu$, e $\eta^{\mu\nu}$é dita **métrica inversa** (em componentes, é igual a $\eta_{\mu\nu}$, no caso da métrica de Minkowski).

Relembremos que a ação da partícula livre é dada por:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\ L = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{m}{2} (\dot{\vec{r}})^2 = \int_{t_i}^{t_f} dt\ \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

não-relativística, com simetrias de rotação e transf. de Galileu.

Como generalizar essa ação para o caso relativístico? Lembremos que a ação deverá satisfazer:

- invariante de Lorentz;
- duas derivadas;

- $c \to \infty$ recupera-se o limite não-relativísitco.

Ora, mas $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ é invariante de Lorentz, e $\sqrt{-ds^2}$ (em particular, qualquer função de invariante de Lorentz também o é). Aqui toma-se o invariante $\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ porque $ds^2 < 0$ para as trajetórias em que estamos interessados (a trajetória de uma partícula é do tipo tempo ou, no máximo, tipo luz). Portanto, uma proposta interessante de ação seria aquela que segue a proporcionalidade:

$$S \propto \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$$

Esta ação é manifestamente invariante de Lorentz. Uma forma de reescrevê-la é:

$$S \propto \int \sqrt{c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_2^2} = \int cdt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2} = \int cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx$$

$$\approx \int cdt \, \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \int cdt - \frac{1}{2c}\int \, dt \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2$$

A primeira integral do último termo é uma constante e não interfere na formulação da ação ("só estamos jogando fora a equação mais famosa da história!"). Encontramos portanto que a ação é proporcional ao segundo termo da última igualdade. Se impusermos que ela se iguala à ação para a partícula livre no caso não-relativístico (de agora em diante **NR**, por comodidade), temos:

$$S = \frac{-k}{2c}\int \, dt \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = \int \, dt \, \frac{m}{2}(\dot{\vec{x}})^2 \Rightarrow k = -mc$$

$$\therefore \boxed{S = -mc\int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}}$$

Obs.: Se $m = 0$, uma ação modificada (ação de Polyakov) poderia ser utilizada. Introduz-se o que se chama de **campo auxiliar**.

A presença das duas derivadas ocorre por meio dos diferenciais dx^μ e dx^ν na introdução de um parâmetro que descreva a trajetória/linha de mundo da partícula. É necessário ainda, no entanto, verificar se as equações de movimento se preservam. De fato, temos por Lagrangeana e respectiva ação:

$$L = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}, S = -mc\int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}$$

A Lagrangeana não depende explicitamente de x^μ, mas sim de $\dot{x^\mu} = dx^\mu/d\xi$. Logo:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\xi}\right)}\right]}_{\text{Equações de Euler-Lagrange}} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{L}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\xi}\right)$$

Como a linha de mundo tem significado físico, a parametrização não deve alterar a ação; assim, a ação é invariante sob reparametrização. O parâmetro intrínseco da curva é, claro, seu comprimento de arco (deve haver, portanto, uma parametrização com velocidade unitária, para a qual a Lagrangeana se simplifica). Façamos $d\xi^2 = -ds^2 \equiv d\tau^2$ (τ é dito **tempo-próprio** pois no referencial que se move no referencial junto do evento, tem-se $d\tau^2 = c^2dt^2 - (d\vec{x})^2, (d\vec{x})^2 = 0$) e "vale":

$$\begin{cases} S = -mc\int\sqrt{\frac{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}{d\xi^2}}d\xi \\ d\xi^2 = -ds^2 = -\eta_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma \end{cases} \Rightarrow L = 1$$

Nesse referencial onde a Lagrangeana é unitária (mais simples, portanto) a equação do movimento obtida se torna:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1}\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = 0 \Rightarrow \eta_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = \frac{d^2x_\mu}{d\tau^2} = 0$$

E como estão igualadas a zero as derivadas, a menos do sinal da métrica, temos:

$$\boxed{\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \text{ (equação da partícula livre relativística)}}$$

Recapitulemos o que foi feito, agora na tentativa de introduzir um potencial. Para a ação:

$$S = -mc\int ds$$

Valem:

$$\begin{cases} \text{Escalar de Lorentz (invariante sob } SO(1,3)) \checkmark \\ \text{Duas derivadas} \checkmark \\ \text{Limite não-relativístico (NR) é obtido fazendo } c \to \infty \checkmark \\ \text{Invariante por reparametrização} \checkmark \end{cases}$$

A pergunta que nos colocamos agora é a de como generalizar o caso não-relativístico:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\left(\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})\right)$$

Aqui, tanto $V(\vec{r})$ quanto dt são escalares de $SO(3)$ (invariantes). Uma generalização dessa característica passa pelo que se chama **completamento e promoção**.

Completamento e promoção:

Precisamos "incluir mais ingredientes" para que escalares sob $SO(3)$ se tornem escalares sob $SO(1,3)$;

Precisamos que escalares de $SO(3)$/componentes de vetores de $SO(1,3)$ sejam "promovidos" para componentes de um vetor de $SO(1,3)$.

Exemplos:

- Velocidade:

$$\vec{v}_{SO(3)} = \frac{d\vec{x}_{SO(3)}}{dt_{SO(3)}} = \frac{\text{vetor de } SO(3)}{\underbrace{\text{escalar de } SO(3)}_{\substack{\text{componente tempo de} \\ \text{um vetor de } SO(1,3) \\ (dt=dx^0,\ c=1)}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{SO(1,3)} = \frac{d\vec{x}_{SO(1,3)}}{\underbrace{d\tau}_{\substack{\text{escalar de} \\ SO(1,3)}}}$$

Aqui, **promoveu-se** o vetor velocidade de $SO(3)$ a componentes de um vetor de $SO(1,3)$ e, ao mesmo tempo, **completamos** esse vetor com um escalar de $SO(1,3)$:

$$\boxed{v^{\mu}_{SO(1,3)} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)}$$

Agora $v^{\mu}_{SO(1,3)}$ se transforma como um vetor sob transformações de $SO(1,3)$ e $v^{\mu}v_{\mu}$ é invariante de Lorentz.

- Densidade de número: a quantidade de partículas por unidade de volume, num dado ponto do espaço e instante de tempo, $n_{SO(3)}(t,\vec{x})$, não é invariante de Lorentz pois, na mudança de um referencial inercial para outro ocorre uma contração de Lorentz (**Fig. 1**) e, consequentemente, um aumento na densidade.

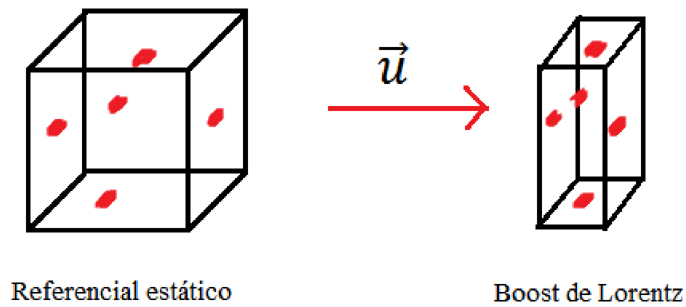

Figura 1: Uma contração de Lorentz devido à mudança de referencial inercial contribui com um aumento na densidade na mudança de referencial.

O que pode ser feito é **promover** essa quantidade a uma componente tempo de um vetor de $SO(1,3)$, isto é, $n_{SO(3)}(t,\vec{x}) \to n^0_{SO(1,3)}(x^\mu)$. Por **completamento**:

$$\boxed{j^\mu_{SO(1,3)} = (n^0_{SO(1,3)}, j^i_{SO(1,3)})}$$

A esse quadrivetor dá-se o nome de **corrente de partículas**.