4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

22 de agosto de 2017

Para a ação da partícula livre, tínhamos:

$$S = \underbrace{-m\int ds}_{=-m\int\sqrt{-\dot{x}^2}d\xi} = -m\int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = -m\int d\xi\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}} \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{reparametr.}\\ \xi\to\tilde{\xi}(\xi)}}$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{\text{reparametr.}} \tilde{S} = -m\int\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}d\tilde{\xi}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}d\tilde{\xi}}\frac{dx^\nu}{\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}d\tilde{\xi}}} = -m\int d\tilde{\xi}\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tilde{\xi}}\frac{dx^\nu}{d\tilde{\xi}}}, L = -m$$

Por meio da reparametrização a Lagrangeana depende apenas da massa da partícula mas, e no caso de uma partícula sem massa? Uma maneira de reformular esta ação é introduzir uma função $e(\xi)$ (*einbein*, ou métrica) tal que:

$$\tilde{S} = \int\frac{d\xi}{2}(e^{-1}\dot{x}^2 - m^2 e), \text{ onde } \dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}$$

A Lagrangeana com a função $e(\xi)$ é dita não-propagante, ou não-dinâmica, pois não depende de $\dot{e} \equiv \frac{de}{d\xi}$. A equação de movimento que temos de resolver é:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{e}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{e}}\right) = 0 = \frac{\partial L}{\partial e} \Rightarrow m^2e^2 + \dot{x}^2 = 0 \Rightarrow e(\xi) = \sqrt{-\frac{\dot{x}^2(\xi)}{m^2}}$$

$$\boxed{\tilde{S} = \int\frac{d\xi}{2}\left(\sqrt{-\frac{m^2}{\dot{x}^2(\xi)}}\dot{x}^2 - m^2\sqrt{-\frac{\dot{x}^2(\xi)}{m^2}}\right) = -m\int d\xi\sqrt{-\dot{x}^2} \quad \text{(Ação de Polyakov)}}$$

A última igualdade contém, à esquerda, a forma final da **ação de Polyakov** e, à direita, o caso particular da ação que tinhamos para uma partícula de massa $m \neq 0$. Podemos agora tratar uma partícula de massa zero da seguinte forma:

Exercício:

Encontrar as equações de movimento para uma partícula cuja ação é dada por:

$$\tilde{S} = \int \frac{d\xi}{2}(e^{-1}\dot{x}^2) \ (m = 0)$$

Concluir que a velocidade com a qual a partícula se desloca é $v = c$.

Promoção e completamento:

$$n^\mu(x) = (\underbrace{n^0(x)}_{\substack{\text{densi-}\\\text{dade de}\\\text{número}}},\ n^i(x)), x \equiv (t, \vec{x}) = x^\mu \text{ (corrente de número)}$$

Uma densidade de número pode ser escrita, em três dimensões, para localizar uma partícula na origem, na forma:

$$\begin{cases} n(t, \vec{x}) = \delta(\vec{x}) \\ \int \ d^3x \ \delta(\vec{x}) = 1 \end{cases}$$

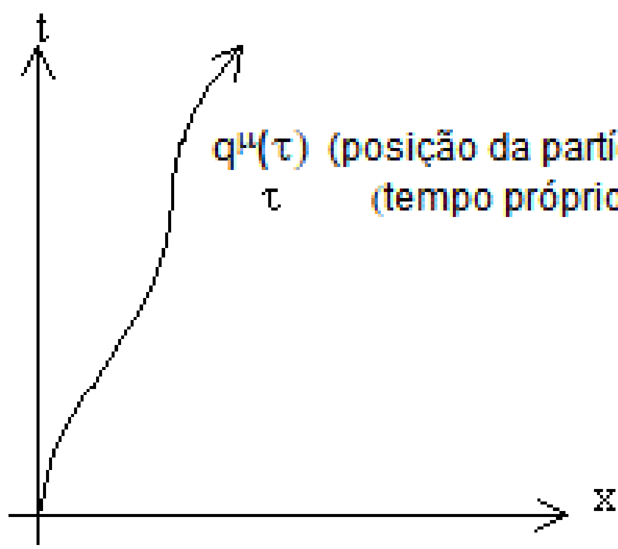

Figura 1: Diagrama simplificado de uma linha de mundo de tipo tempo, parametrizada pelo tempo próprio.

Desejamos generalizar essa forma para o caso relativístico. Escrita em termos do tempo próprio, $q^\mu(\tau)$ é a posição da partícula:

$$q^\mu(\tau) = \begin{cases} q^0 = \tau \\ \vec{q} = \vec{0} \end{cases} \qquad (d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu)$$

$$\delta^3(\vec{x}) = \underbrace{\int d\tau \; \delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right)}_{\substack{\text{pode ser visto como} \\ \text{a identidade integral}}} \delta^3(\vec{x}) = \int d\tau \; \underbrace{\frac{dq^0}{d\tau}}_{=1} \; \delta\left(x^0 - q^0(\tau)\right) \; \delta\left(\vec{x} - \vec{q}(\tau)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta^3\left(\vec{x}\right) = \int d\tau \; dq^0 d\tau \; \delta^4\left(x - q(\tau)\right)$$

Onde definimos a delta de Dirac em quatro dimensões no último passo. Em particular, $\delta^4(x - q(\tau))$ é um escalar de $So(1,3)$ pois, integrando sobre o espaço tridimensional:

$$1 = \int \delta^3\left(\vec{x}\right) \; d^3\vec{x} = \int d^4x \; \delta^4\left(x - q(\tau)\right)$$

Como d^4x e 1 são escalares de Lorentz, a delta também é. Promovemos a delta em três dimensões a um invariante de Lorentz (invariante sob $SO(1,3)$) relacionando-o à derivada da primeira componente da curva $q^\mu(\tau)$; por completamento, temos:

$$n^\mu(x) = \int \; d\tau \frac{dq^\mu}{d\tau} \delta^4(x - q(\tau))$$

Este é um vetor sob $SO(1,3)$, onde x^μ é um ponto qualquer do espaço-tempo, e $q^\mu(\tau)$ é a trajetória da partícula. Desejamos agora generalizar esse vetor para mais partículas (pelo menos, para uma distribuição discreta delas):

$$n^\mu(x) = \sum_{a=1}^{n} \int \; d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau} \delta^4(x - q_a(\tau_a))$$

De maneira análoga, introduzindo cargas às partículas, temos o vetor **corrente eletromagnética**:

$$J^\mu(x) \doteq \sum_{a=1}^{n} \; e_a \; \int \; d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau} \delta^4(x - q_a(\tau_a))$$

A versão não-relativística nos dava $dn(t, \vec{x})/dt = 0$. Agora temos, por outros lado:

$$\partial_\mu n^\mu(x) \doteq \frac{\partial}{\partial x^\mu} n^\mu(x) = \frac{\partial n^0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} n^i = \frac{\partial n^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (eq. de continuidade)}$$

Assim, $\partial_\mu n^\mu = 0$ é a equação em sua versão relativística.

> **Obs.:** A equação de continuidade expressa um invariante de Lorentz no sentido de que o operador:
>
> $$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \text{ (operador momento covariante)}$$
>
> É contraído com o vetor $J^\mu(x)$ corrente eletromagnética (contravariante), resultando no escalar identicamente nulo.

Façamos um teste:

$$\partial_\mu n^\mu(x) = \sum_{a=1}^{n} \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau} \underbrace{\partial_\mu \delta^4(x - q_a(\tau_a))}_{= -\frac{\partial}{\partial q_a^\mu}\delta^4(x - q_a(\tau_a))} = -\sum_{a=1}^{n} \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial q_a^\mu} \delta^4(x - q_a(\tau_a)) =$$

$$= -\sum_{a=1}^{n} \delta^4(x - q_a(\tau_a))\Big|_{\tau_a = -\infty}^{\tau_a = +\infty} = 0$$

A última igualdade se justifica pelo fato de que a curva de tipo tempo "se espalha" por todo espaço tempo ($q_a^0(\pm\infty) = \pm\infty$), enquanto $t = x^0 < \infty$ é fixado, de modo que a delta está sendo avaliada em pontos distintos (logo, é nula).

> **Exercício**: repetir essa análise para uma **densidade de energia** ($\rho(t, \vec{x})$ invariante, *a priori*, em $SO(3)$, dada pela razão energia/volume).
>
> **Dica**: essa grandeza deve ser promovida à componente T^{00} de um tensor 2-contravariante sob $SO(1,3)$ (tensor energia-momento).

Partícula livre: $S = -m \int ds$, Partícula em potencial, NR: $S = \int dt \left(\frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})\right)$

Nos vemos tentados a fazer:

$$S = -m \int ds - \int dt \underbrace{V(\vec{x})}_{=?}$$

Mas o que é $dt\, V(\vec{x})$? Certamente um invariante sob $SO(3)$; façamos a promoção do potencial à componente tempo de um quadrivetor, a ser completado:

$$A^0 \doteq V \ (A_0 = -V), A^\mu(x) = (A^0(x), A^i(x)), \text{ vetor sob } SO(1,3)$$

$$dtA_0(t,\vec{x}) \underbrace{\rightarrow}_{\text{prom.}} dx^\mu A_\mu(x) = -dx^0A^0(x) + dx^iA^i(x), \text{ invariante sob } SO(1,3)$$

O que nos leva à sugestão de ação:

$$\boxed{S = \int (-m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} + A_\mu(x)dx^\mu), \text{ manifestamente invariante sob } SO(1,3)}$$

Ainda devemos, é claro, verificar se essa ação faz sentido, isto é, se as equações de movimento estão corretas, se o limite não-relativístico é obtido etc. Para as equações de movimento temos:

$$S = \underbrace{-m\int d\xi\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}}_{(S_I)} + \underbrace{\int d\xi A_\mu(x(\xi))\frac{dx^\mu}{d\xi}}_{(S_{II})}$$

$$(I)\ \delta S_I = 0 \Rightarrow \delta\left(-m\int d\xi\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -m\int d\tau\,\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d}{d\tau}\delta x^\nu = -m\int d\tau\,\eta_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\right)\delta x^\nu \text{ (etc.; já fizemos isso)}$$

$$(II)\ \delta S_{II} = 0 \Rightarrow \delta\left(\int d\xi\ A_\mu(x(\xi))\frac{dx^\mu}{d\xi}\right) \Rightarrow 0 = \int d\tau\left(\underbrace{A_\mu\frac{d}{d\tau}\delta x^\mu}_{\substack{\text{integração}\\ \text{por partes}}} + (\partial_\nu A_\mu)\delta x^\nu\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) \Rightarrow$$

$$0 = -\int d\tau\left(\frac{dA_\mu}{d\tau}\right)\delta x^\mu + \int d\tau\,(\partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\mu}{d\tau}dx^\nu = \int d\tau\left((\partial_\nu A_\mu)\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu + \partial_\mu A_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau}dx^\mu\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \int d\tau\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu(\underbrace{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}_{\doteq F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}})$$

O tensor antissimétrico que aparece na última igualdade tem grande importância na formulação do eletromagnetismo e recebe o nome de **tensor eletromagnético** (de fato, este é um tensor de tipo 2-covariante sob $SO(1,3)$). Para a ação total, temos:

$$\delta S = 0 \Rightarrow = \int d\tau\ \left(-m\eta_{\mu\nu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\delta x^\nu + F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu_\nu\frac{dx^\nu}{d\tau} = \eta^{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \doteq \mathfrak{F}^\mu}$$

Essa equação se assemelha muito à segunda lei de Newton escrita num formalismo covariante. Ainda falta algo para que a ação do eletromagnetismo esteja completa, "falta vida ao campo" (dinâmica). De fato, essa ação descreve como a partícula se desloca, e como o campo interage com a partícula, mas não como o campo se modifica devido à interação com a partícula. Em outras palavras, falta um termo que dependa da variação do campo (derivadas), que veremos na próxima aula.