4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

25 de agosto de 2017

$$
\begin{tikzcd}
\text{“invariante”} \arrow[d] & vs. & \text{“covariante”} \arrow[d] \arrow[r] & \text{muda, mas de um jeito “legal”} \\
\text{ação/escalar de } SO(1{,}3) & & \text{eq. do movimento } \left(\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=0\right) &
\end{tikzcd}
$$

Partícula relativística (dinâmica) em um campo de fundo (não-dinâmico):

$$S = \underbrace{-m\int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}}_{\int dt\, \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2,\ \text{termo cinético}} + \underbrace{\int d\xi\ A_\mu(x(\xi))\frac{dx^\mu}{d\xi}}_{-\int dt\ V(\vec{x}),\ \text{termo potencial}}$$

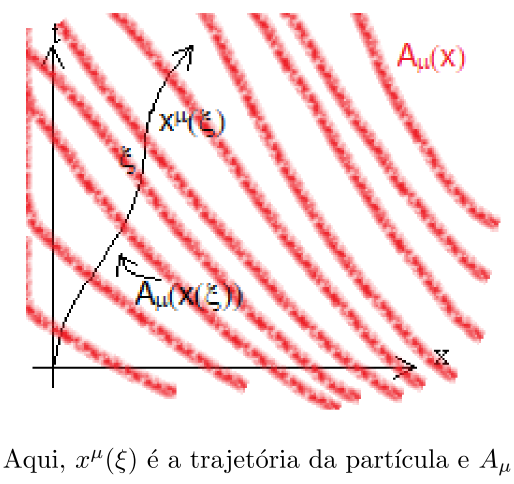

Figura 1: Aqui, $x^\mu(\xi)$ é a trajetória da partícula e $A_\mu(x)$ o campo.

Na aula anterior calculamos a variação com respeito a x^μ:

$$0 = \delta S = \int d\tau \Big(-m\eta_{\mu\nu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\delta x^\nu + \underbrace{F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\delta x^\mu}_{=F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\mu\rho}\delta x^\rho} \Big) \Rightarrow \boxed{m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \doteq \mathfrak{F}^\mu}$$

Onde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Calculemos o limite N.R.:

$$dt = dx^0 >> dx^i, (dx^0)^2 - (dx^i)^2 = d\tau^2 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} \approx 1 >> \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$\mu = i \Rightarrow m\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx F^i_\nu \frac{dx^\nu}{dt} = F^i_0 \frac{dx^0}{dt} + \underbrace{F^i_j \frac{dx^i}{dt}}_{=0}$$

$$A_0 = -V, A_i = 0, F^i_0 = F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i V$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i V \Rightarrow \boxed{m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V \text{ (Newton)}}$$

Exercício:

Demonstrar que a equação:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\nu_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

é a da **força de Lorentz**.

Precisamos "quebrar" as componentes em $SO(3)$. A parte espacial dos quadrivetores contidos no tensor $F_{\mu\nu}$ e a seguinte igualdade nos leva à definição do vetor E_i:

$$\underbrace{F_{0i}}_{\substack{\text{vetor}\\ \text{de } SO(3)?}} = -F_{i0} \Rightarrow F_{0i} \equiv -E_i$$

Analogamente:

$$\underbrace{F_{ij}}_{\substack{\text{tensor}\\ \text{de } SO(3)?}} = -F_{ji}$$

Consideremos:

$$\boxed{\epsilon_{ijk}F_{jk} = \epsilon_{ijk}F^{jk}} \Rightarrow \boxed{B_i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}}$$

Exercício:

Demonstrar a identidade:

$$\epsilon_{imn}\epsilon_{ijk} = \delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj}$$

Dica: O símbolo de Levi-Civita é uma combinação de -1's, 0's e 1's e a expressão à esquerda possui quatro índices livres, assim, é razoável supor que vale:

$$\sum_i \epsilon_{imn}\epsilon_{ijk} = \alpha_1\delta_{mj}\delta_{nk} + \alpha_2\delta_{mk}\delta_{nj}$$

A razoabilidade na suposição dessa forma se deve ao fato de que é necessário distribuir quatro índices, dois a dois, nas deltas de Kronecker à direita, sem repetições redundantes, e com índices "misturados" (m deve ir com j ou k, e o mesmo para n, pois queremos escrever um tensor antissimétrico). Encontre α_1 e α_2.

Usando o resultado do exercício e "multiplicando" B_i por ϵ_{imn} podemos isolar a componente correspondente do tensor F_{ij}:

$$\Rightarrow \epsilon_{imn}B_i = \alpha(F_{mn} - F_{nm}) = 2\alpha F_{mn} \underbrace{\Rightarrow}_{\alpha=1/2} F_{mn} = \epsilon imn B_i$$

O cálculo de componentes do tensor F_{ij} tem, por exemplo:

$$F_{xy} = \epsilon_{ixy}B_i = \underbrace{\epsilon_{zxy}B_z}_{i\neq 0, \epsilon_{ixy}=0} = B_z$$

Obtém-se, dessa forma, a expressão para $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

No entanto, E_i e B_i não são vetores de $SO(3)$ (de fato, não se transformam como vetores sobre rotações) e não vale:

$$\begin{cases} E^\mu = (E^0, E^i) \\ B^\mu = (B^0, B^i) \end{cases}$$

Essas componentes são, em vez disso, **unificadas em um tensor** de ordem 2.

$$F^{\mu\nu} \underbrace{\rightarrow}_{SO(1,3)} \boxed{F^{\mu\nu\;\prime} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}F^{\rho\sigma}}$$

Sob transformações de Lorentz, as componentes elétricas e magnétcias (puras ou não) dependem do referencial, pois podem estar separadas em um referencial, e "misturadas" em outro. Essa é a mensagem mais importante do curso.

Exercícios:

1. Descrever o eletromagnetismo em $2+1$ dimensões, onde o tensor eletromagnético é dado por:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & B \\ E_y & B & 0 \end{pmatrix}_{SO(1,2)}$$

   Demonstrar que B é escalar de $SO(2)$ e que E_i é vetor de $SO(2)$.

2. Descrever o eletromagnetismo em $4+1$ dimensões, onde o tensor eletromagnético é dado por:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z & -E_w \\ E_x & 0 & - & - & - \\ E_y & - & 0 & - & - \\ E_z & - & - & 0 & - \\ E_w & - & - & - & 0 \end{pmatrix}_{SO(1,2)}$$

   Demonstrar que B é tensor de $SO(4)$ (pense em como deve ser B!) e que E_i é vetor de $SO(4)$.

3. Recupere a força de Lorentz especificando $\mu = i$ na equação:

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \mathfrak{F}^\mu \;\left(t \neq \tau, \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}\right)$$

   Entenda o significado para $\mu = 0$, com a definição $p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau}, p^0 =$ Energia.

Aqui temos uma assimetria, porque a partícula está "viva" e o campo "morto": falta introduzir dinâmica por meio de uma ação para o campo A^μ (que dependa de suas derivadas). Temos algumas sugestões:

- $\eta_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \equiv 0$ (inútil);

- $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ (inv. de Lorentz, duas derivadas, **simetria de calibre**).

Essa última opção exibe uma característica chamada **simetria de calibre**. Isso significa que a ação:

$$S = \int dx^\mu A_\mu(x)$$

É invariante sob a mudança:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$$

Onde $\Lambda(x)$ é uma função escalar sob $SO(1,3)$ (dita **parâmetro de calibre**/*gauge*).

$$\underbrace{\int dx^\mu A_\mu(x)}_{=V} \to \int dx^\mu (A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)) = V + \underbrace{\int dx^\mu \partial_\mu \Lambda(x)}_{=l,\text{const.}}$$

A ação é essencialmente a mesma se l for uma constante qualquer(as equações de movimento não são alteradas). Para $l = 0$ corresponde um conjunto específico de funções parâmetro de calibre. De fato, temos ainda:

$$F^{\mu\nu} \to \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = F_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda}_{=0,\Lambda \text{ derivável}}$$

Notamos aqui que a invariância de calibre de $F_{\mu\nu}$ implica na invariância de calibre de E_i e B_i, mas não a de A_μ (no caso, pela própria definição da transformação ser aplicadaem A_μ).

Assim, simetria de calibre não é uma simetria, pelo menos não no sentido de uma rotação ou um *boost*, e sim uma redundância, devida ao potencial ser escrito como uma função com certa arbitrariedade. Voltaremos a tratar de "*gauge fixing*" e graus de liberdade quando falarmos de ondas eletromagnéticas. Chegamos, por fim, à ação do eletromagnetismo:

$$\boxed{S_{\mathcal{EM}} = \sum_{a=1}^{n} \int \Big(\underbrace{-m_a \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu}}_{\substack{\text{termo} \\ \text{cinético de} \\ \text{partículas}}} + \underbrace{e_a A_\mu(x_a) dx_a^\mu}_{\substack{\text{interação} \\ \text{partícula-} \\ \text{campo}}} \Big) - \overbrace{\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{convenção}} \underbrace{\int d^4x \; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\substack{\text{termo} \\ \text{cinético} \\ \text{de campos}}}}^{\text{Ação de Maxwell}}}$$

Agora "há vida para o campo", visto que a ação depende explicitamente das derivadas do campo (por meio do tensor eletromagnético) e se torna, assim, dinâmica.

Na ausência de cargas temos o que se chama de "campo livre", pois as cargas definem o acoplamento entre partícula e campo no termo de interação entre ambos. A correção ou simetrização da diferença que há entre a ação para partículas e campos se deve ao fato de que uma delas é a integração sobre o espaço-tempo, e a outra só sobre a linha de mundo das partículas.

Por meio da promoção das partículas a campos (pela composição com uma delta), usual em teoria quaântica de campos, remove-se essa assimetria. Uma última observação é a de que podemos extrair duas equações importantes fazendo:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} \to \text{força de Lorentz}$$

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} \to \text{eqs. de Maxwell}$$