# 4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

29 de agosto de 2017

Consideremos um conjunto de $n$ partículas, suas trajetórias no espaço-tempo e um campo de fundo ao qual estas partículas estão submetidas. A ação deste sistema se escreve:

$$S = \underbrace{\int \sum_{a=1}^{n} \left( -m_a \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu} + e_a A_\mu(x_a) dx_a^\mu \right)}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\mathrm{II}}$$

As variações dessa ação nos fornecem, respectivamente:

$$\frac{\delta S}{\delta x_a^\mu} \to \text{Força de Lorentz}$$

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} \to \text{Equações de Maxwell}$$

Calculemos explicitamente essas variações, separando os termos da densidade lagrangiana, temos:

$$\delta \left( F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = 2F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu} \left( \partial^\mu (\delta A^\nu) - \partial^\nu (\delta A^\mu) \right) =$$
$$= 2F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - 2F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu = 4F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu$$

$$\Rightarrow \delta \left( -\frac{1}{4} \int d^4x \ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = - \int d^4x \ F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) =$$
$$= \int d^4x \ (\partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu = \int d^4x \ (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu \ (\mathrm{I})$$

$$\delta_a \left( \sum_{a=1}^{n} e_a \int d^4x \ \delta^4(x - x_a) A_\mu(x) dx_a^\mu \right) = \delta_a \left( \sum_{a=1}^{n} e_a \int d\tau_a \int d^4x \ \delta^4(x - x_a) A_\mu(x) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a} \right) =$$

$$= \delta_a \left( \int d^4x \underbrace{\sum_{a=1}^{n} e_a \int d\tau_a \int d^4x \; \delta^4(x - x_a) \frac{dx_a^\mu}{d\tau_a}}_{=J^\mu(X)} A_\mu(x) \right) = \delta_a \left( \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x) \right) =$$

$$= \int d^4x J^\mu(x) \delta A_\mu(x) \text{ (II)}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$$

Em suma:

$$S = \int \sum_{a=1}^{n} \left( -m_a \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx_a^\mu dx_a^\nu} \right) + \int d^4x \; J^\mu(x) A_\mu(x) - \frac{1}{4} \int d^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$$

**Exercícios**

1. (Acoplamento típico em *QED*, ou eletrodinâmica quântica) Fazer a análise dimensional necessária para a obtenção de um **parâmetro adimensional** usando as grandezas $c$, $\hbar$, $e$ (carga elétrica do elétron) e $m_e$ (massa do elétron). Essa constante recebe o nome de **constante de estrutura fina**.

2. Verificar que $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu$ leva a equações de Maxwell, onde $J^\mu = (\rho, \vec{J})$. Exemplo:

$$\nu = 0 : \partial_\mu F^{\mu 0} = -J^0 = \underbrace{\partial_0 F^{00}}_{=0, F_{00} \equiv 0} + \partial_i \underbrace{F^{i0}}_{=-E^i} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho}$$

**Obs.**: a equação da continuidade está contida nessa equação tensorial: $\underbrace{\partial_\mu \partial_\nu}_{\text{antissim.}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{sim.}} = 0 = -\partial_\nu J^\nu$

As equações de Maxwell homogêneas são, em verdade, **identidades** (no caso, identidades de Bianchi). De fato, ao definirmos o **tensor dual**:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

Onde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o **símbolo de Levi-Civita**:

$$\begin{cases} 1, \text{ se } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ é permutação par de } (1234) \\ -1, \text{ se } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ é permutação ímpar de } (1234) \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

São trivialmente verdadeiras (tautologias) [1]:

$$\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\rho A_\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$$

**Exercícios**

3. Verificar que $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ fornece outras duas equações de Maxwell.
4. Fazer o exercício da **Lista 3** sobre dualidade das equações para $F^{\mu\nu}$ e seu dual.
5. Derivar Relatividade Geral seguindo as mesmas ideias. **Dica**: colocar o potencial dentro da raiz, com o chute:

$$S = -m\int\sqrt{\left(1+\frac{2V}{m}\right)dt^2 - \vec{dx}^{\,2}}$$

O limite não-relativístico está certo, mas a expressão não é invariante de Lorentz. Pode-se por sua vez "chutar":

$$-m\int\sqrt{g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu}, \eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x), \frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0 \to \text{Geodésicas}$$

Sob esse ponto de vista, a ação é de uma partícula "viva", agora em um espaço-tempo dinâmico. É necessário explorar **simetrias ocultas** (invariância por transformações de coordenadas/difeomorfismos).

# Eletrostática

De posse das equações de Maxwell suponhamos agora um referencial com $\vec{J} = \vec{B} = \vec{0}$. Temos:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \text{ (ou } 4\pi\rho\text{, ou } \rho/\epsilon_0) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \end{cases}$$

[1] **Nota do redator**: essas deduções do eletromagnetismo covariante estão disponíveis em "Einstein Gravity in a Nutshell", cap. 4, de A. Zee.

Tem-se, basicamente, dois casos a serem tratados:

1. Há bastante simetrias e, nesse caso, não precisamos da equação do rotacional do campo. (As questões a serem cobradas cobrirão, provavelmente, todo conteúdo até aqui);

2. Não há bastante simetria e precisamos impor a equação $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ ao campo. Precisamos também (ou é prático definir) introduzir a função potencial $V(\vec{x})$, fazendo com que a condição do divergente recaia sobre uma **equação de Poisson**.

**Lei de Gauss**: Seja $V \subset \mathbb{R}^3$. Temos:

$$4\pi Q \equiv \int_V d^3x \; 4\pi\rho = \underbrace{\int_V d^3x \; \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{S=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\substack{\text{essa igualdade se deve} \\ \text{ao teorema de Gauss}}}$$

Onde $S \doteq \partial V$ é a **fronteira** do conjunto $V$ e a terceira igualdade se deve ao teorema de Gauss. À equação integral do fluxo de campo elétrico numa superfície dá-se o nome de **lei de Gauss**.

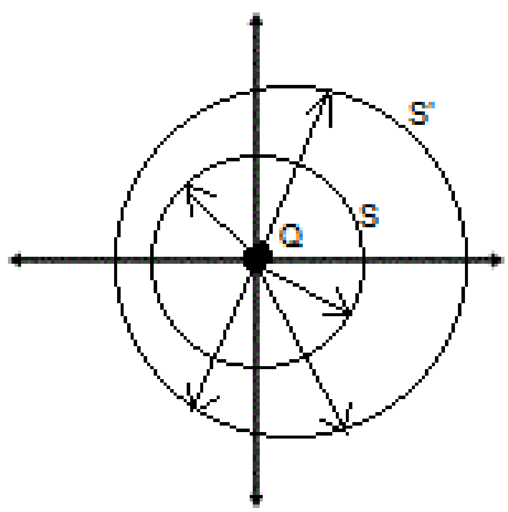


Figura 1: Superfícies para as quais vale $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ (as flechas representam o campo elétrico devido à carga).

Essa integral tem o mesmo valor para superfícies de volumes "encaixados" (se um volume é interior a outro, e uma carga está localizada no centro do interior desse volume, então a integral de fluxo da superfície do segundo volume é igual à do primeiro volume). Se a carga que gera o campo estiver fora de um dado volume, a integral do fluxo, com respeito a essa superfície, é nula.

**Lei de Coulomb**: Seja $Q$ distribuída em uma esfera de raio $R$, e o campo calculado a uma distância $r \geq R$:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \int_S \hat{r} \cdot \underbrace{\left(r^2 d\phi \ sen \ \theta \ d\theta\right) \hat{r}}_{=d\vec{S}} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi Q = \int_V d^3x \ 4\pi\rho$$

A primeira igualdade se deve às simetrias do sistema (o campo tem simetria esférica, $\vec{E}(r, \theta, \phi) = E(r)\hat{r}$), e a terceira à lei de Gauss. Chegamos a:

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{r^2}\hat{r}}$$

Num caso específico da **força de Lorentz**, com $\vec{v} = \vec{B} = \vec{0}$, obtemos:

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

Usando o formalismo de Maxwell, sabemos como será a "dança dessas partículas". Supusemos o campo de fundo fixo, de forma que $q$ e seu campo não interferem significativamente com $\vec{E}$ (isso é o que no jargão se chama "no back reaction").

**Exercícios**

6. Mostrar que esse campo verifica $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$.

7. O campo gravitacional obedece uma lei de forças similar:

$$F_N = \frac{GMm}{r^2}$$

   Calcular a razão das magnitudes das forças gravitacional e elétrica (usando massa e carga do elétron). Devido ao valor dessa razão diversos argumentos de desconsideração de uma força em detrimento doutra devido às escalas serão utilizados.

8. Calcular o campo de uma esfera uniformemente carregada em função da distância (radial) à origem.

9. (Para os sadomasoquistas) Recuperar a lei de Coulomb para um elipsoide.

10. Calcular o campo elétrico em um ponto do espaço devido a um fio infinito com densidade linear de carga uniforme.

    **Dica**: a superfície de Gauss conveniente a ser utilizada é um cilindro, e a integral de superfície do campo não tem contribuição nas "tampas", pois o campo é paralelo a elas.