4302303 - Eletromagnetismo I - Segundo Semestre de 2017

01^{o} de setembro de 2017

Revisão de exercícios:

1. Dedução do primeiro par de equações de Maxwell.

   A derivada funcional da ação do eletromagnetismo, com relação ao campo, nos dá duas equações de Maxwell. Calculemos;

$$\delta_A S = \delta_A \int \left(J_\mu A^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \int \left(J_\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4} 2 F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} \right)$$

   A parte da partícula livre não depende explicitamente do campo. Podemos calcular separadamente o termo da variação $\delta F^{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} \left(\delta F^{\mu\nu} \right) = F_{\mu\nu} \left(\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu \right) = 2 F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu)$$

   Dessa forma, temos:

$$\delta_A S = \int \left(J_\mu \delta A^\mu - F_{\nu\mu} \partial^\nu \delta A^\mu \right) = \int \left(J_\mu + \partial^\nu F_{\nu\mu} \right) \delta A^\mu \Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} + J^\mu = 0$$

   Especificando os valores das componentes de índice livre ($\mu = 0, 1, 2, 3$) obtém-se duas equações de Maxwell.

2. Descrição de transformações de Lorentz como rotações.

   Comecemos olhando para um caso particular em $SO(D)$ (com $D = 2$). Temos:

$$\begin{cases} R^T R = \mathbf{1} \\ det\ R = 1 \end{cases}$$

Esse determinante é escolhido de forma que essas matrizes estejam continuamente conectadas com a identidade. Podemos assim, expandir R em sua série de Taylor:

$$R = \mathbf{1} + A + \mathcal{O}(A^2) \Rightarrow \mathbf{1} = R^T R \approx (\mathbf{1} + A)(\mathbf{1} + A^T) = \mathbf{1} + A + A^T + \mathcal{O}(A^2)$$

$$\therefore \boxed{A^T = -A} \text{ (matriz antissimétrica)}$$

É possível escrever todas matrizes 2×2 antissimétricas com apenas um **parâmetro** θ:

$$A = \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Essa matriz é a base das matrizes antissimétricas de $SO(2)$ (e é dita gerador da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$; um gerador da álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(n)$ é uma das matrizes resultantes da avaliação da derivada da matriz de rotação nos parâmetros que dão a origem, como $\theta = 0$, por exemplo).

Se considerarmos a definição de exponencial para números reais:

$$e^{\theta} \doteq \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\theta}{N}\right)^N = \lim_{n\to\infty} \big(\underbrace{1 + \delta\theta}_{\substack{\text{equivalen-} \\ \text{te a } \mathbf{1}+A}} \big)^N, \quad \underbrace{\delta\theta}_{\substack{\text{ângulo} \\ \text{infinite-} \\ \text{simal}}} \doteq \frac{\theta}{\underbrace{N}_{\substack{\text{inteiro} \\ \text{grande}}}}$$

A aplicação sucessiva (por um número grande de vezes) de uma matriz "próxima" da identidade nos recupera uma rotação qualquer (diz-se que o gerador, ao ser exponenciado, dá uma rotação do conjunto de matrizes de $SO(2)$):

$$e^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \to e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n \text{ par}} \frac{A^n}{n!} + \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{A^n}{n!}$$

Da definição de A verifica-se que essa matriz satisfaz $A^n = \theta^n J$, onde J é ora a matriz a identidade, ora o gerador de $\mathfrak{so}(2)$ (conforme a paridade de n). Assim:

$$e^A = \underbrace{\left(\sum_{n \text{ par}} \frac{\theta^n}{n!} \right)}_{= cos\ \theta} \mathbf{1} + \underbrace{\left(\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{\theta^n}{n!} \right)}_{= sen\ \theta} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\ \theta & sen\ \theta \\ -sen\ \theta & cos\ \theta \end{pmatrix}$$

Assim, recupera-se uma matriz qualquer de $SO(2)$, parametrizada por um parâmetro real, o ângulo de rotação no plano que essa matriz impõe a um vetor.

Se considerássemos um espaço-tempo com uma dimensão de espaço e uma de tempo ($SO(1,1)$, razoável, visto que podemos definir transformações de Lorentz em uma das três direções ortogonais e generalizar para mais direções), teríamos:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\mathbf{1} + A^T\right) \eta \left(\mathbf{1} + A\right) = \eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{1}\eta\mathbf{1} + A^T\eta + \eta A + \underbrace{A^T \eta A}_{=\mathcal{O}(A^2)} = \eta \Rightarrow \boxed{A^T \eta = -\eta A}$$

Essa equação matricial pode ser explicitamente resolvida para matrizes 2×2 nesse caso:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{11} = a_{22} = 0, a_{21} = a_{12}, A^T = A \text{ (simétrica)}, tr\ A = 0}$$

$$\therefore \Lambda = \mathbf{1} + \phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\phi^2)$$

O conjunto de geradores da álgebra de Lie correspondente a $SO(1,3)$ podem, na **representação do grupo de Lorentz**, ser escritos cada um como componentes de um tensor 2-covariante, que obedece [1]:

$$J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$$

$$\begin{cases} J_{0\nu} \to J_{0i}, \nu = 0,1,2,3 \to \textit{Boosts} \\ J_{\mu\nu} \to J_{ij}, \mu,\nu = 0,1,2,3 \to \text{Rotações} \end{cases}$$

Há, portanto, $4(4-1)/2 = 6$ geradores, três de *boosts* (os J_{0i}) e três de rotações (os J_{ij}). Devido à particularidade de que para $D = 3$ o número de geradores da álgebra de Lie correspondente a $SO(3)$ é igual à dimensão do espaço, uma associação é feita entre J_{ij} e $(J_x, J_y, J_z) = (J_1, J_2, J_3)$, com $J_{ij} \mapsto J_k$ (onde (ijk) é permutação par de (123)). As relações de comutação obedecidas por esses geradores são:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}\right)$$

Os 16 geradores que obedecem essa relações de comutação compõe o que é chamado de **álgebra de Lorentz**. Ao completarmos esse conjunto com operadores que satisfazem as relações adicionais:

$$\begin{cases} [P_\mu, P_\nu] = 0 \\ [J_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu \end{cases}$$

A um conjunto de operadores que satisfaz essas relações de comutação dá-se o nome de **Álgebra de Poincaré**, da qual a Álgebra de Lorentz é um caso particular (sem os operadores/geradores de momento linear).

Exercício:

1. (Desafiador) Encontre a Álgebra de Galileu (procure por ela em algum livro ou outra referência) como um caso particular, não-relativístico, da Álgebra de Poincaré.

Na representação tridimensional, um dos geradores de momento angular se escreve como:

$$J_Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definindo $\mathcal{J}_i \doteq iJ_i$ e temos $\mathcal{J}_i^\dagger = \mathcal{J}_i$, pois $(iJ_i)^\dagger = -i(-J_i)$ (o conjugado hermitiano de uma matriz anti-simétrica real é o negativo desta matriz). Verifica-se as seguinte propriedades dos comutadores:

$$[A, B]^\dagger = -[A, B], [\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k$$

Por razões que ficam evidentes em Mecânica Quântica, é conveniente escrever as relações de comutação dessa forma com os operadores "complexificados".

3. Descrição do eletromagnetismo em mais dimensões.

   São invariantes de Lorentz as quantidades:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

   As equações de Maxwell podem ser lidas a partir de:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

Onde $\tilde{F}^{\mu\nu} \doteq \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$. A simetrização adequada desse par de equações se daria na substituição $0 \leftrightarrow -\tilde{J}^{\nu}$. Mais sobre a simetrização dessas equações e sua relação com existência de monopolos magnéticos pode ser encontrado no artigo de Gaumé e Hassan [2]. Decorre da mecânica quântica que, se houver uma unidade de monopolo, então o produto da carga elétrica pela unidade de monopolo é proporcional a algum inteiro (carga elétrica quantizada).

É possível explorar a dualidade dos tensores acima da mesma forma que se faz em quatro dimensões:

$$4D: \; F_{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{F}^{\mu\nu}$$

Só que em mais dimensões como, por exemplo, dez:

$$10D: \; F_{\mu\nu\rho\sigma\lambda} \leftrightarrow \tilde{F}_{\mu\nu\rho\sigma\lambda}$$

Diz-se que o eletromagnetismo nestes moldes apresenta **dualidade-S**, onde o dual é calculado a partir do símbolo de Levi-Civita apropriado.

Descontinuidades

Encontremos as condições de contorno (descontinuidades) impostas a um sistema eletrostático por meio das equações de Maxwell. Seja um cilindro infinitesimal como na figura

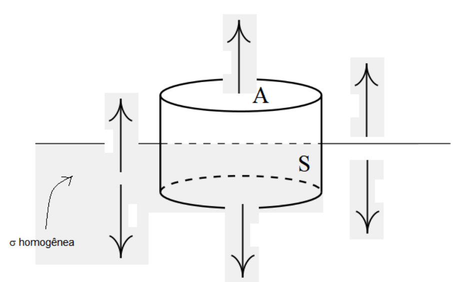

Figura 1: Cilindro para o qual o fluxo será calculado.

No que se segue, estaremos usando unidades tais que $4\pi\epsilon_0 = 1$. O campo devido a um plano infinito carregado, com densidade superficial de carga uniforme σ tem simetria acima e abaixo do plano: $\vec{E} = E(z)\hat{z}, E(z) = -E(-z), E(z) = 2\pi\sigma$ (constante). De fato, escolhendo o cilindro como superfície gaussiana:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(z)A - E(-z)A = 2E(z)A = 4\pi\sigma A = 4\pi Q$$

Aqui, usou-se que o campo é perpendicular ao plano e não há contribuição para o fluxo nas laterais do cilindro. Logo:

$$\lim_{z\to 0^+} E(z) - \lim_{z\to 0^-} E(z) = 4\pi\sigma \Rightarrow \hat{n}\cdot\vec{E}|_+ - \hat{n}\cdot\vec{E}|_- = 4\pi\sigma$$

Analogamente, para um circuito fechado infinitesimal transversal à superfície:

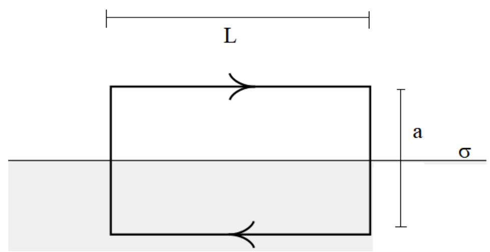

Figura 2: Circuito para o qual a circulação será calculada.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\sigma} = \int \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \hat{n}\times\vec{E}|_+ - \hat{n}\times\vec{E}|_- = 0$$

Portanto, as componentes normais e tangencial do campo a uma superfície são, respectivamente, contínua e descontínua (o conteúdo de prova será cobrado até aqui, mais capítulos do Griffiths.)

Potencial eletrostático:

Sejam as equações de Maxwell da eletrostática:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}V \end{cases}$$

A última igualdade se escreve devido ao teorema para formas de cohomologia de de Rham; podemos escrever a equação para o operador rotacional como:

$$\epsilon_{ijk}\partial_j E_k = 0 \Rightarrow \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\text{antissim.}} \underbrace{\partial_j\partial_k}_{\text{sim.}} V = 0$$

As equações da eletrostática se reduzem, portanto, à **equação de Poisson**:

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

Para uma carga puntiforme na origem, sua distribuição $\rho(\vec{x})$ torna a equação em:

$$\boxed{\nabla^2 V = -4\pi Q\delta^3(\vec{x})}$$

Para pontos fora da origem ($\vec{x} \neq \vec{0}$) temos a **equação de Laplace**, $\nabla^2 V = 0$. Soluções desse tipo de equação são ditas **funções harmônicas**. Nos restrinjamos a fazer um chute da solução:

$$V = \frac{\alpha}{r}, \alpha = \text{const.}$$

$$\vec{\nabla} r = \hat{r}, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\hat{r}}{r^2} = \frac{-\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla} V = \frac{-\alpha\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \nabla^2 V = -\alpha\left(\frac{\overbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{r}}^{=3}}{r^3} - \frac{3\vec{r}\cdot\vec{r}}{r^5}\right) = 0$$

Onde fez-se $\vec{r} = (x, y, z)$. Assim:

$$\begin{cases}\rho(\vec{x}) = Q\delta^3(\vec{x}) \\ \int \rho(\vec{x})d^3x = Q\end{cases} \Rightarrow \int_{S=\partial V} -\vec{\nabla}\underbrace{V}_{\alpha/r}\cdot d\vec{S} = 4\pi Q, \alpha = Q, V = \frac{Q}{r}, \vec{E} = -\vec{\nabla} V = \frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Este é o primeiro e mais simples exemplo de **função de Green**, uma função que satisfaz:

$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3\left(\vec{r} - \vec{r}'\right)$ (solução da eq. de Laplace inomogênea, com fonte delta)

Nesse caso, tínhamos:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{-1}{4\pi}\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$$

Seja $\rho(\vec{r}) \neq \vec{0}$ em um volume V. Temos:

$$V(\vec{r}) = -4\pi\int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}') = \int_V d^3r\frac{\rho(\vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||}, \vec{r} = (x, y, z)$$

Isso se deve pois, ao tomar o laplaciano dessa expressão, recuperamos a equação definidora de G:

$$\begin{cases}\nabla^2 V = -4\pi\rho \\ \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\end{cases} \Rightarrow \nabla^2 V = \nabla^2_{\vec{r}} V(\vec{r}) = \nabla^2_{\vec{r}}\left(-4\pi\int_V d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')\right)$$

$$\Rightarrow -4\pi\int_V d^3r' \underbrace{\left(\nabla^2_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}')\right)}_{=\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')}\rho(\vec{r}') = \rho(\vec{r})$$

Por essa razão, a de "levar" a influência de cada ponto $\vec{r}$ em $\vec{r}'$ devida a um campo, $G(\vec{r}, \vec{r}')$ também é chamado de **propagador**. Para cada operador linear (como o laplaciano, o d'alambertiano e outros operadores de outras teorias de campos mais gerais) corresponde uma função de Green específica, que caracteriza a teoria.

Referências

[1] Representation theory of the Lorentz group - Wikipedia. Representation theory of the Lorentz group: Conventions and Lie algebra bases,.

[2] L. Alvarez-Gaume e S.F. Hassan. Introduction to S-Duality in N=2 Supersymmetric Gauge Theory. (A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten). 1997. Introduction to S-Duality in N=2 Supersymmetric Gauge Theory. (A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten).