Aula - 22/02/16 Relatividade

Rotações $SO(3)$

1) transformação que deixa o produto escalar (comprimento) invariante

$$\vec{dx}\cdot\vec{dx} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = \sum_{i=1}^{3} (dx_i)^2$$

$$\downarrow SO(3)$$

$$\vec{dx}'\cdot\vec{dx}' = \vec{dx}\,\vec{dx} \Rightarrow R^T(\theta)\,R(\theta) = \mathbb{1}$$

$$(det = +1)$$

2) Um vetor é definido pelas suas propriedades de transformação sob $SO(3)$

Um vetor é alguma coisa que se transforma como $\vec{dx}$ sob $SO(3)$

MQ: Representações operatoriais

$SO(3)$: $\mathcal{J}_x \quad \mathcal{J}_y \quad \mathcal{J}_z$

$$J_x = -i\,\mathcal{J}_x \qquad -i \rightarrow \text{para deixar } J_i \text{ hermitiano}$$

$$J_y = -i\,\mathcal{J}_y \qquad J_x^\dagger = (J_x^*)^T = (-i)^*\,\mathcal{J}_x^T$$

$$J_z = -i\,\mathcal{J}_z \qquad = i(-\mathcal{J}_x)$$

$$= -i\,\mathcal{J}_x = J_x$$

$$J_z \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow J_z = i\left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Algebra:

unidade imaginária

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\, \epsilon_{ijk} J_k}$$

$i, j, k = x, y, z$

ϵ_{ijk} totalmente antissimétrico

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \quad ; \quad \epsilon_{kji} = -\epsilon_{ijk} \quad ; \quad \epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xyz} = +1 \\ \epsilon_{iij} = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} J_k = \sum_{k=x,y,z} \epsilon_{ijk} J_k$$

índices repetidos = somados

$$= \sum_{\mu=x,y,z} \epsilon_{ij\mu} J_\mu$$

posso renomear K

$$[J_i, J_j] = J_i J_j - J_j J_i$$

$i = x$
$j = y$

$$J_x J_y - J_y J_x$$

$$[J_x, J_y] = i\, \underbrace{\epsilon_{xyk} J_k}_{\sum_k \epsilon_{xyk} J_k} = i\, \epsilon_{xyz} J_z = i J_z$$

$$[J_x, J_z] = i\, \epsilon_{xzy} J_y = -i J_y$$

$$[J_y, J_z] = i\,\epsilon_{yzx} J_x = i J_x \qquad [A,B] = -[B,A]$$

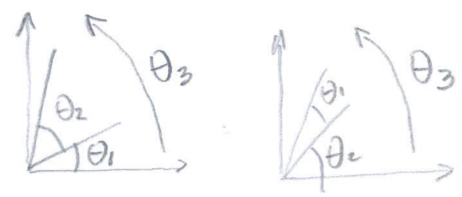
$$[J_i, J_j]^\dagger = (i\,\epsilon_{ijk} J_k)^\dagger$$

$$(J_i J_j - J_j J_i)^\dagger = J_j^\dagger J_i^\dagger - J_i^\dagger J_j^\dagger = -[J_i, J_j]$$

$$(i\,\epsilon_{ijk} J_k)^\dagger = \overset{-i}{i^\dagger}\,\epsilon_{ijk} \underset{J_k}{\underset{\parallel}{J_k^\dagger}} = -i\,\epsilon_{ijk} J_k$$

SO(2)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [J, J] = 0$$



SO(2) é uma Algebra abeliana

Algebra de SO(D)

D dimensões

$i, j = 1, \ldots, D$ indices da matriz

$$J^{ij}_{(mn)} = -i\left(\delta^{mi}\delta^{nj} - \delta^{mj}\delta^{ni}\right)$$

etiqueta da matriz

$$J_x^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \qquad J_y^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \qquad J_z^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij}$$

(mn) $\quad m, n = 1, \ldots, D$ $\qquad \dfrac{D.(D-1)}{2}$

$(mn) = -(nm)$

$D = 3 \quad \dfrac{3.(2)}{2} = 3 \;;\; D = 4 \quad \dfrac{4(3)}{2} = 6 \;,\; D = 5 \quad \dfrac{5(4)}{2} = 10$

$\underline{D=3}$ $\quad J_{(12)} \quad J_{(13)} \quad J_{(23)}$ $\qquad \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$\quad\quad\;\; \| \qquad\; \| \qquad\; \|$

$\quad\quad\; J_z \quad\; J_y \quad\; J_x$

$\underline{Obs}$ $\quad [J_x, J_y] = i J_z \longrightarrow J_x^{ij} J_y^{jk} = (J_x J_y)^{ik}$

$$(J_x J_y - J_y T_x)^{\cancel{ik}} = i J_z^{\cancel{ik}}$$

omitin

$J_{(mn)}^{\cancel{ij}} \qquad J_{(pT)}^{\cancel{kl}}$

$$\boxed{[J_{(mn)}, J_{(pq)}] = i(\delta_{mp} J_{(mq)} + \delta_{mq} J_{(mp)} - \delta_{mp} J_{(mq)} - \delta_{mq} J_{(mp)})}$$

Algebra de SO(D)

Vetor de SO(D)

$$x^i \longrightarrow x^{i'} = R^{ij} x^j = \sum_{j=1}^{D} R^{ij} x^j$$

$\hookrightarrow R \in SO(D)$

Tensor de SO(D)

$$T^{ij} \longrightarrow T^{ij'} = R^{ik} R^{jl} T^{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{D} \sum_{l=1}^{D} R^{ik} R^{jl} T^{kl}$$

tensor de ordem (= rank) 2

Tensor de ordem 3

$$W^{ijk} \longrightarrow (W^{ijk})' = R^{ii'} R^{jj'} R^{kk'} W^{i'j'k'}$$

$$= R^{ia} R^{jb} R^{ka} W^{abc}$$

$$= R^{i\star} R^{j\clubsuit} R^{k☾} W^{\star\clubsuit☾}$$

Vetor

$$V^i \longrightarrow (V^i)' = R^{ij} V_j$$

Atuar com derivadas $V^i(x)$

$$W^{ij} = \frac{\partial}{\partial x^j} V^i \longrightarrow R^{ik} R^{jl} W^{kl}$$

HW

Regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)' = \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= R^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$dx^i \rightarrow R^{ij} dx^j = (dx^i)'$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow R^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)'$$

$$W^{ij}(x) \longrightarrow (W^{ij}(x'))' \equiv \frac{\partial V'^i(x')}{\partial x'^j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} R^{il} = 0$$

$$= R^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(R^{il} V^l(x)\right)$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} R^{jk} R^{il} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^k} V^l(x)}_{W^{lk}(x)}$$

Tem a soma

Não vai ser verdade em um espaço curvo

$$\frac{\partial R}{\partial x} \neq 0$$

$\frac{\partial}{\partial x^k} = \partial_k$ se transforma como um vetor

$\vec{\nabla}$

Representações

T^{ij} $\quad i,j = 1,2,3$ $\quad \boxed{SO(3)}$ $\quad T^{ij} \longrightarrow (T^{ij})' = \underbrace{R^{ik} R^{jl}}_{\text{matrizes } 3\times 3} T^{kl}$

$$\begin{matrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{matrix}$$

trans - linear em T^{ij}

Eu posso pensar em fazer

$$\begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{13} \\ T^{21} \\ T^{22} \\ T^{23} \\ T^{31} \\ T^{32} \\ T^{33} \end{pmatrix}_{9\times 1}$$

Não é um vetor!

Representar $R^{ik} R^{jl} T^{kp}$ como uma matriz 9×9 $\longrightarrow D(R)$ atuando sobre

$D(R)$ é uma representação tensorial de $SO(3)$

$\hookrightarrow$ 9 - dimensional

$D(R_1 R_2) = D(R_1) D(R_2)$

Vetor = representação fundamental de $SO(3)$

$$T^{11} \longrightarrow (T^{11})' = R^{1k} R^{1l} T^{kl}$$

$$= R^{1k}(R^{11}T^{k1} + R^{12}T^{k2} + R^{13}T^{k3})$$

$$= R^{11}R^{11}T^{11} + R^{11}R^{12}T^{12} + R^{11}R^{13}T^{13} +$$

$$+ R^{12}R^{11}T^{21} + \dots$$

$$\begin{pmatrix} (R^{11})^2 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ & 9\times 9 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ T^{13} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}' \\ T_{12}' \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Redutível vs. Irredutível

$A^{ij} = T^{ij} - T^{ji}$ parte antissimétrica de T^{ij}

$$A^{ij} = -A^{ji}$$

$$A^{ij} \longrightarrow (A^{ij})' = (T^{ij})' - (T^{ji})'$$

$$= R^{ik}R^{jl}T^{kl} - R^{jk}R^{il}T^{kl}$$

$$= R^{ik}R^{jl}T^{kl} - R^{jl}R^{ik}T^{lk}$$

$$= R^{ik}R^{jl}\underbrace{(T^{kl} - T^{lk})}_{A^{kl}}$$

$$\frac{D(D-1)}{2}$$

$$\boxed{A^{12} \quad A^{13} \quad A^{23}}$$

$$A^{21} = -A^{12}$$

$$A^{31} = -A^{13}$$

$$A^{32} = -A^{23}$$

$$A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0$$

$$S^{ij} = T^{ij} + T^{ji} \qquad \left(T^{ij} = \frac{S^{ij} + A^{ij}}{2} \right)$$

$$\frac{D(D+1)}{2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ & S^{22} & S^{23} \\ & & S^{33} \end{matrix}}$$

Ex.: $S^{ij} \longrightarrow R^{ik} R^{jl} S^{kl}$

traço $S^{ii} = S^{11} + S^{22} + S^{33} \longrightarrow (S^{ii})' = R^{ik} R^{il} S^{kl}$

$$= (R^{ki})^T R^{il} S^{kl}$$

$$= \delta^{kl} S^{kl} = S^{kk}$$

$$= S^{ii}$$

$\underline{D=3}$

$$9 \longrightarrow \underset{\text{traço}}{1} + \underset{A_{ij}}{3} + \underset{(S_{ij}-\text{traço})}{5}$$

$$\underset{9\times 9}{D(R)}$$

$$D(R) = \begin{pmatrix} 3\times 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1\times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5\times 5 \end{pmatrix}_{9\times 9} \begin{pmatrix} A^{12} \\ A^{13} \\ A^{23} \\ \text{traço} \\ S^{11}-\text{traço} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{D(D-1)}{2} + 1 + \left(\frac{D(D+1)}{2} - 1 \right)$$