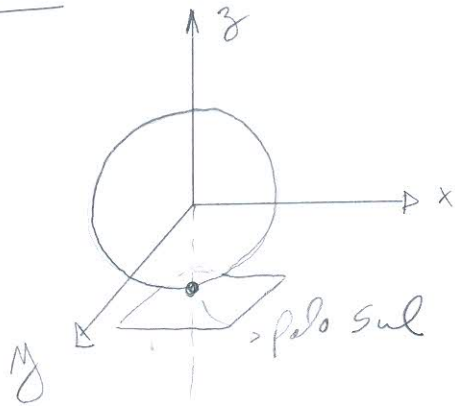


Relatividade - 01/03

Espaços curvos



Esfere:



$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2$$

$$S: \quad x = y = 0$$

↑
polo sul

$$z = -\sqrt{L^2 - x^2 - y^2}$$

$$z = -L$$

$z \rightarrow z + L$: polo sul no plano $z = 0$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$z = -\sqrt{L^2 - x^2 - y^2} + L$$

Localmente, perto de S:

$$z \approx -L \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{2} \frac{y^2}{L^2} \right) + L$$

$$= \frac{1}{2L} (x^2 + y^2) \leftarrow \text{concurvidade parabólica}$$

Em qual, será:

$$z \approx \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{2} b y^2 + c x y$$

$$[a] = [b] = [c] = \frac{1}{\text{Comprimento}}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= dx^2 + dy^2 + [(ax + cy)dx + (by + cx)dy]^2$$

$$= \underbrace{g_{xx}} dx^2 + \underbrace{g_{yy}} dy^2 + \underbrace{2g_{xy}} dx dy$$

$$\searrow = (ax + cy)(by + cx)$$

$$\searrow = 1 + (by + cx)^2$$

$$\searrow = 1 + (ax + cy)^2$$

$$\begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{pmatrix} \xrightarrow{x,y \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z \approx \frac{1}{2} \vec{x}^T M \vec{x} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

→ Entender onde informações invariantes de curvatura estão escondidas.

ex.: Curvatura deve ser invariante sob rotações

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R \vec{x}$$

$$z \rightarrow \frac{1}{2} \vec{x}'^T R^T M R \vec{x} \quad R^T M R = M'$$

Se a curvatura está escondida em M , como suspeitamos, ela deve ser invariante sobre rotações.

→ deve ser a mesma para M e M'

→ traço e determinante

Diagonalizem M

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \vec{x}'^T \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \vec{x}' = \frac{1}{2} (u \ v) \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \mu u^2 + \frac{1}{2} \nu v^2$$

$$\textcircled{1} \det M = \mu \nu = ab - c^2$$

$$\textcircled{2} \frac{(\text{tr } M)^2}{4} = \frac{1}{4} (\mu + \nu)^2 = \frac{1}{4} (a+b)^2$$

Independente da escolha de coordenadas.

$\det M \rightarrow$ Curvatura intrínseca

$\frac{1}{4} (\text{tr } M)^2 \rightarrow$ Curvatura extrínseca

ex: esfera:

$$a = b = \frac{1}{L} \quad c = 0 \quad \Rightarrow \det M = a^2 = \frac{1}{L^2}$$

Normalizar o traço $\rightarrow \frac{1}{4} (\text{tr } M)^2 = a^2$
 Para ser igual ao det na esfera

ex.: Um cilindro tem curvatura extrínseca, mas não tem curv. intrínseca



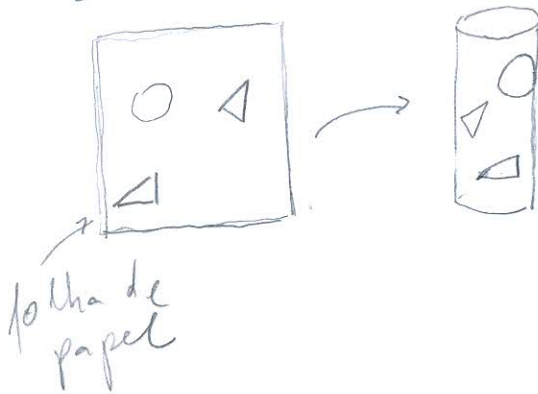
$$z = -\sqrt{L^2 - x^2} + L$$

indep. de $y \rightarrow b=c=0, a \neq 0$

$$\det M = 0$$

$$\frac{1}{4}(\text{tr } M)^2 = \frac{1}{4}a^2 \neq 0$$

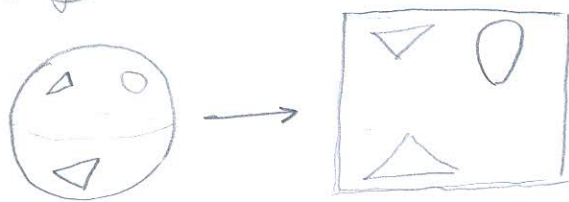
Cilindro:



raio do círculo e os ângulos do triângulo não mudam

↓
curv. intrínseca = 0

Esfera:

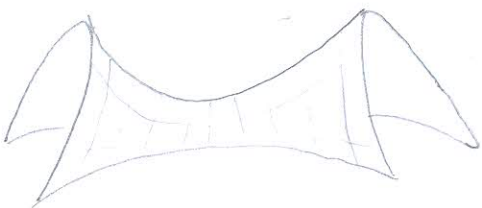


muda ângulos e raio

Esfera: espaço com curvatura constante positiva. $a^2 > 0$

curvatura negativa

Sela $\mu = -\nu$



$$z = \frac{1}{2}\mu u^2 - \frac{1}{2}\mu v^2$$

$$\rightarrow \det M = -\mu^2 < 0$$

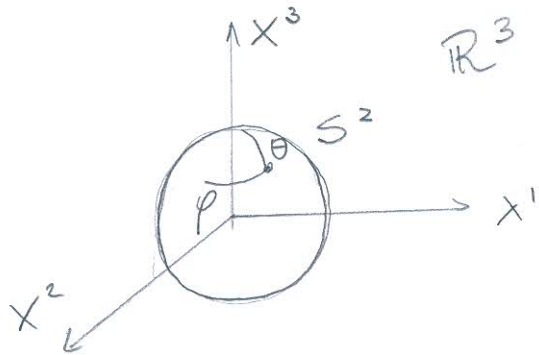
"Embedding" \rightarrow Mergulho

$$\underbrace{(x^1, \dots, x^D)}_{\textcircled{D}} \rightarrow \underbrace{X^A(x^1, \dots, x^D)}_{A=1 \dots N}$$

ex: $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $D=2 \quad N=3$

$(x^1, x^2) = (\theta, \varphi)$

$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = 1$ (Vínculo)



$$ds^2 = \sum_A (dX^A)^2 = \sum_A \frac{\partial X^A}{\partial x^M} dx^M \frac{\partial X^A}{\partial x^N} dx^N$$

$$= \sum_{\mu, \nu} \left(\sum_A \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^A}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu$$

métrica induzida $g_{\mu\nu}$

em geral, $ds^2 = \sum_{A,B} G_{AB} dX^A dX^B$

métrica do espaço ambiente

Esfera: $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ \rightarrow ambiente

$$ds^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 =$$

$$= (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \frac{(X^1 dX^1 + X^2 dX^2)^2}{1 - (X^1)^2 - (X^2)^2}$$

\rightarrow Ache a métrica induzida (HW)

Mais em geral \rightarrow "Localmente plano"

(dimensões D)

$$g'_{\lambda\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \quad (*)$$

\rightarrow o objetivo é chegar em uma métrica localmente plana

expandida perto de $x=0$ Taylor

$$g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} x^\lambda + B_{\mu\nu\rho\sigma} x^\rho x^\sigma + \dots$$
$$x^\mu \approx K^\mu{}_\nu x'^\nu + L^\mu{}_{\nu\lambda} x'^\nu x'^\lambda + M^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} x'^\nu x'^\lambda x'^\sigma + \dots$$

\rightarrow Quero achar uma transformação que deixe

$$\begin{cases} g_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu} \\ A_{\mu\nu\lambda} = 0 \end{cases}$$

Não vai ser possível em geral colocar $B_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = K^\mu{}_\nu + \frac{\partial}{\partial x'^\nu} (L^\mu{}_{\rho\lambda} x'^\rho x'^\lambda) + \frac{\partial}{\partial x'^\nu} (M^\mu{}_{\rho\lambda\sigma} x'^\rho x'^\lambda x'^\sigma) + \dots$$

$$\rightarrow = K^\mu{}_\nu + 2L^\mu{}_{\nu\lambda} x'^\lambda + 3M^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} x'^\lambda x'^\sigma + \dots$$

Simetria (HW)

$$(*) \quad g'_{\lambda\sigma}(x') = (g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} x^\lambda + B_{\mu\nu\lambda\sigma} x^\lambda x^\sigma + \dots) \cdot (K^\mu{}_\lambda + 2L^\mu{}_{\lambda\rho} x'^\rho + \dots) \cdot (K^\nu{}_\sigma + 2L^\nu{}_{\sigma\zeta} x'^\zeta + \dots)$$

$$g'_{\lambda\sigma}(x') = (g_{\mu\nu}(0) + A_{\mu\nu\lambda} K^\lambda_\rho x'^\rho + B_{\mu\nu\lambda\sigma} K^\lambda_\rho K^\sigma_\xi x'^\rho x'^\xi + \dots) \cdot (K^\mu_\lambda + \dots) \cdot (K^\nu_\sigma + \dots)$$

$$x' = 0$$

$$g'_{\lambda\sigma}(0) = g_{\mu\nu}(0) K^\mu_\lambda K^\nu_\sigma$$

como matrizes:

$$g' = K^T g K \quad \left[K^\mu_\lambda \rightarrow D^2 \text{ componentes} \right]$$

preciso usar $\frac{1}{2} D(D+1)$ componentes de K^μ_λ para colocar g de forma diagonal

$$\frac{D(D+1)}{2} : g \rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \\ 0 & \dots & & g_{DD} \end{pmatrix}$$

"rescaling" / reparametrização das coordenadas

$$\text{ex: } x' \rightarrow \frac{x'}{g_{11}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ & g_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & g_{DD} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Têm $D^2 - \frac{1}{2} D(D+1) = \frac{1}{2} D(D-1)$ componentes de K que não use:

elementos que deixam $\delta_{\mu\nu}$ invariante rotações

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + \tilde{A}_{\mu\nu\lambda} x^\lambda + \dots$$

$\tilde{A}_{\mu\nu\lambda} \rightarrow$ novo $A_{\mu\nu\lambda}$ mas mesmas coordenadas com

K^μ fixado

K^μ_λ
já usi

$L^\mu_{\lambda\sigma}$

$L^\mu_{\lambda\sigma} x'^\lambda x'^\sigma \rightarrow$ simétrico em λ, σ

$$D \times \left(\frac{D(D+1)}{2} \right)$$

= # de componentes de $L^\mu_{\lambda\sigma}$

λ $\mu\nu \rightarrow$ simétrico

de componentes de $\tilde{A}_{\mu\nu\lambda}$

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} + B_{\mu\nu\lambda\sigma} x^\lambda x^\sigma + \dots$$

$$x^\mu = x'^\mu + M^\mu_{\nu\lambda\sigma} x'^\nu x'^\lambda x'^\sigma + \dots$$

$$B_{\mu\nu\lambda\sigma} : \left(\frac{1}{2} D(D+1) \right)^2$$

Simétrico: $\begin{matrix} \uparrow (\mu\nu) \\ (\lambda\sigma) \end{matrix}$

Comp $M^\mu_{\nu\lambda\sigma}$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ D \\ \uparrow \\ M \end{matrix} \left(\frac{1}{6} D(D+1)(D+2) \right)$$

$(\nu\lambda\sigma)$ (HW)

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} D(D+1) \right)^2}_{\# B's} - \underbrace{D \left(\frac{1}{6} D(D+1)(D+2) \right)}_{\# M's} = \boxed{\frac{D^2}{12} (D+1)(D-1)}$$

Número de componentes de B que não podem ser removidas usando M \rightarrow Curvatura

$D=0 \rightarrow 0$ componentes que não são números

$D=1 \rightarrow 1$

$D=3 \rightarrow 6$

$D=4 \rightarrow 20$

\vdots

Esquemáticamente:

$$B \sim \partial^2 g + (\partial g)^2$$

Curvatura tem a ver com derivadas segundas da métrica.