Relatividade - 28/03

Partículas + campos

Princípio de ação para partículas

$$S_{matéria} = \int dt \sum_a m_a \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{q_a}}{dt} \right)^2 - \phi(q_a(t)) \right)$$

↳ várias partículas → soma sobre partículas

Princípio de ação para campos (ex. campo de gravidade)

$$S_{gravidade} = -\int dt \int d^3\vec{x} \left(\frac{1}{8\pi G} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \rho\phi \right)$$

ϕ = potencial gravitacional $= \phi(\vec{x})$

$$\int d^3x \, \rho \phi = \sum_a m_a \phi(\vec{q_a}(t))$$

↳ $\sum_a m_a \delta^3(\vec{x} - \vec{q_a}(t))$

$$\phi(\vec{x}) \xrightarrow[\delta^3(\vec{x} - \vec{q_a}(t))]{} \phi(\vec{q_a}(t))$$

$$S = \int dt \left\{ \sum_a \frac{m_a}{2} \left(\frac{d\vec{q_a}}{dt} \right)^2 - \int d^3x \frac{1}{8\pi G} (\vec{\nabla}\phi)^2 - \underbrace{\int d^3x \sum_a m_a \delta^3(\vec{x} - q_a(t))\phi}_{\text{Interação}} \right\}$$

esse termo não depende de t

↳ Nessa ação as mudanças nas partículas mudam instantaneamente o campo (Viola causalidade)

Problemas: 1) o campo não é dinâmico pois não há duas derivadas temporais de ϕ $\rightarrow$ propagação instantânea

2) Campos e partículas são tratados de maneira diferente

$$\int dt \quad \text{vs.} \quad \int dt\, d^3\vec{x}$$

$\rightarrow$ Além do curso de RG: TQC

Solução de 1)

$$\boxed{(\vec{\nabla}\phi) \longrightarrow -\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2}$$

$\rightarrow$ Invariante por transf. de Lorentz

Simetrias e conservação: Teorema de E. Noether

$$L\left(q_a, \frac{dq_a}{dt}, t\right)$$

Imaginemos que L tem uma simetria = invariante sob uma transformação

$$q_a \longrightarrow q_a + \delta q_a$$

Ex1. Partícula em 2D em um potencial central

$$V(\vec{r}) = V(r)$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) - V(r)$$

$\hookrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\rightarrow$ é invariante sob Rotações

$$\begin{cases} x \rightarrow x + \epsilon y \\ y \rightarrow y - \epsilon x \end{cases} \quad \text{(HW)}$$

Ex 2: 2 partículas q_1 & q_2 com pot. que depende só da distância $|q_1 - q_2|$

$$L = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\right) - V(|q_1 - q_2|)$$

invariante sob translações

$$\begin{cases} q_1 \to q_1 + \epsilon \\ q_2 \to q_2 + \epsilon \end{cases}$$

↳ vai ter quantidades conservadas

$$\begin{cases} q_a(t) \to q_a(t) + \delta q_a(t) \\ L = L\left(q_a, \frac{dq_a}{dt}\right) \\ \frac{dq_a}{dt} \to \frac{d}{dt}(q_a + \delta q_a) = \frac{dq_a}{dt} + \delta\left(\frac{dq_a}{dt}\right) \end{cases}$$

$$0 = \sum_a \left(\boxed{\frac{\delta L}{\delta q_a}} \delta q_a + \frac{\delta L}{\delta\left(\frac{dq_a}{dt}\right)} \frac{d}{dt} \delta q_a \right)$$

$\delta L = 0$
por invariância

E-L

$$\frac{\delta L}{\delta q_a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}}\right)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_a \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}}\right) \delta q_a + \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \frac{d}{dt} \delta q_a \right]$$

$$= \sum_a \frac{d}{dt}\left[\frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \delta q_a\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\epsilon Q\right] = 0 \Rightarrow \epsilon Q = \text{const.}$$

Ex1. $\epsilon Q = \epsilon y \frac{\delta L}{\delta \frac{dx}{dt}} - \epsilon x \frac{\delta L}{\delta \frac{dy}{dt}}$

$$= \epsilon m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right)$$

mom. angular!

Ex2. $\epsilon Q = \epsilon \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_1}{dt}} + \epsilon \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_2}{dt}} = \epsilon \underbrace{m\left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}\right)}_{\text{momento linear}}$

Ex3

Conservação de Energia

$\delta L = 0$ pode ser generalizado para

$\delta L = \frac{dK}{dt}$ (derivada total)

$$0 \neq \delta L = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_a \left(\frac{\delta L}{\delta\left(\frac{dq_a}{dt}\right)} \delta q_a\right)$$

$$\boxed{\epsilon Q = \left(\sum_a \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \delta q_a\right) - K}$$ Conservada.

L não depende explicitamente do tempo

$t \rightarrow t + \epsilon$

ϵ const. $\rightarrow dt = dt'$

$$q_a(t) \rightarrow q_a(t+\epsilon) \simeq q_a(t) + \epsilon \frac{dq_a}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\frac{dq_a}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} q_a(t+\epsilon) \simeq \frac{dq_a}{dt} + \epsilon \frac{d^2 q_a}{dt^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

HW

$$\hookrightarrow \delta L = \epsilon \frac{d}{dt} L$$

$$K = \epsilon L$$

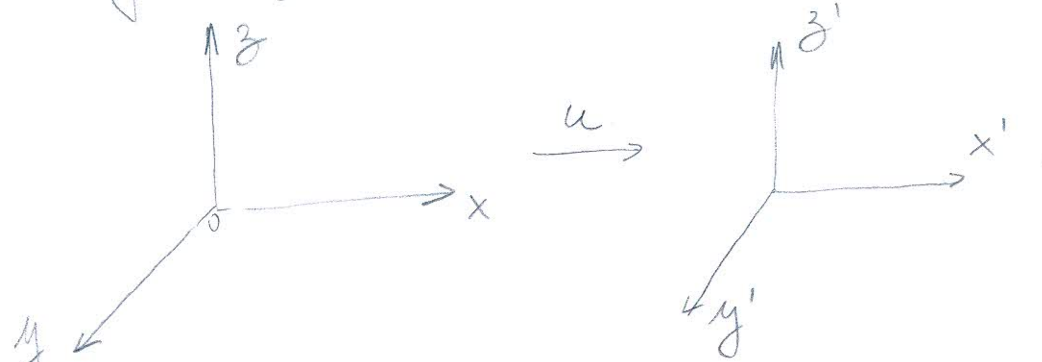
$$\rightarrow \epsilon Q = \sum_a \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \epsilon \frac{dq_a}{dt} - \epsilon L$$

$$= \epsilon \left(\sum_a \frac{\delta L}{\delta \frac{dq_a}{dt}} \frac{dq_a}{dt} - L \right)$$

$$= \epsilon \left(\underbrace{\sum_a p_a \dot{q}_a - L}_{H \text{ (Hamiltoniana)}} \right)$$

Espaço - Tempo

Transformações de Galileo



$$\begin{cases} t = t' \\ x' = x + ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Princípio da relatividade de Galileu

2 observadores em mov. relativo uniforme não podem decidir quem está em mov. com respeito ao outro

Adição de Velocidades:

$$v' \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} + u = v + u$$

Mecânica de Newton é invariante pois $\frac{du}{dt} = 0$

(HW)

$$S = \int dt' \, \frac{1}{2} m \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 = \int dt \, \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} + u\right)^2$$

$$= \int dt \, \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \underbrace{u \int dt \, m \frac{dx}{dt}}_{=\text{ derivada total}} + \underbrace{u^2 \int dt \, \frac{m}{2}}_{\text{Const.}}$$

Maxwell : $\boxed{c = c'}$

$$\rho = \vec{J} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (***) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (*) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (**) \end{cases}$$

$$(*) : \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \overset{(**)}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0 \ (***)}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 E\right) = 0$$ Eq. de ondas

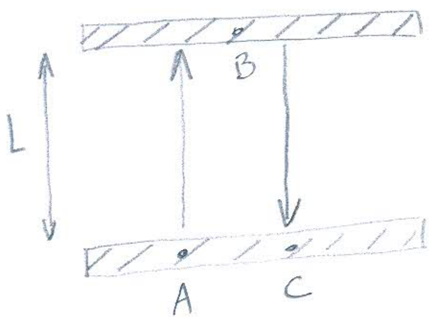
Solução: $\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E_0} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$

$$\frac{\lambda}{T} \equiv v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$\rightarrow$ Consequência: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8$ m/s independe do referencial!

Galileo $\rightarrow$ Lorentz

Transf. Lorentz:



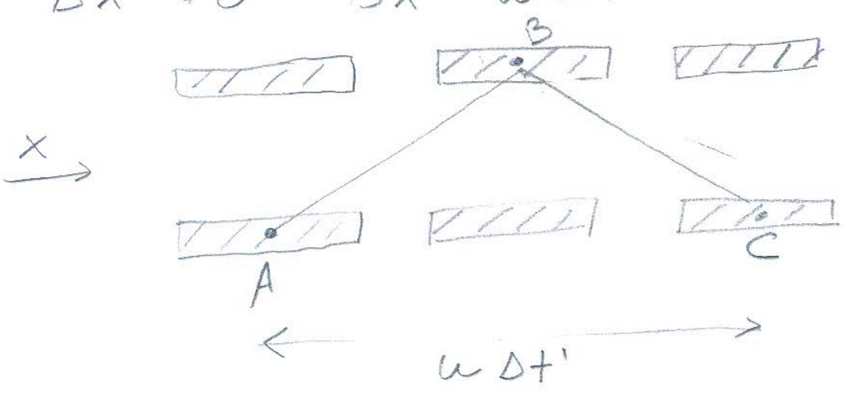
$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$

$\Delta t = \frac{2L}{c}$

Referencial em movimento ao longo de x

$\Delta y' = \Delta z' = 0$

$\Delta x' \neq 0 \quad \Delta x' = u\,\Delta t'$



$\Delta t' = \frac{\text{distancia}}{c'}$ $\rightarrow$ $\boxed{c' = c}$

$c\,\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{1}{2} u \Delta t'\right)^2}$

$\Delta x' = u\,\Delta t'$

$c\,\Delta t' = 2\sqrt{\left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2 + L^2}$

$$c^2\Delta t'^2 = 4\left(\frac{1}{4}\Delta x'^2 + L^2\right) \Rightarrow c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 4L^2$$

$$\boxed{c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 = 4L^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2}$$

$\to$ No outro ref.

$-\Delta y'^2 - \Delta z'^2$ $\qquad\qquad$ $\Delta y^2 - \Delta z^2$

$\boxed{c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^{\,2}}$ combinação invariante

$SO(D)$: $\Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{x}$

$?$: $c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{x}$