Relatividade 30/03

$$\begin{cases} SO(D) : \vec{dx}^2 \\ ? \quad : c^2 dt^2 - \vec{dx}^2 \end{cases} \quad (\vec{x}, t) \to (\vec{x}', t') \text{ tal que } c^2dt^2 - \vec{dx}^2 = c^2 dt'^2 - \vec{dx}'^2$$

1) Relação entre $(\vec{x}, t)$ e $(\vec{x}', t')$ deve ser linear

reescalando $\{t', \vec{x}'\} \to \{\lambda t', \lambda \vec{x}'\}$

Uma relação não linear vai dar problemas:

Por ex.: $t' = t + ax^2 \longrightarrow \lambda t' = \lambda t + a\lambda^2 x^2 \neq \lambda(t + ax^2)$

2) "$u \to 0$" : preciso obter Galileo

$(u \ll c)$

Analise Dimensional

•) Sem c : a única combinação com dimensão de tempo é $\frac{x}{u}$

$t' = t + \zeta \frac{x}{u}$ 1) ✓

2) ✗ $u \to 0$ diverge $\Rightarrow \zeta = 0$

•) Com c : $\frac{ux}{c^2}$

$t' = t + \zeta \frac{ux}{c^2}$ 1) ✓

2) ✓

ζ não precisa ser constante

$\zeta = \zeta\left(\frac{u}{c}\right)$

$$\boxed{t' = \xi\left(t + \zeta \frac{ux}{c^2}\right)}$$

$$\xi = \xi\left(\frac{u}{c}\right) \; ; \; \zeta = \zeta\left(\frac{u}{c}\right) \qquad \xi(0) = 1$$

$$\boxed{x' = \chi(x + ut)} \; ; \; \begin{cases} \chi = \chi\left(\frac{u}{c}\right) \\ \chi(c) = 1 \end{cases}$$

~~$pu = u$~~

redefinir

ξ = xi

χ = chi

ζ = zeta

Queremos $(t_0' = 0 \quad t_0 = 0 \quad x_0' = 0 \quad x_0 = 0)$

$$c^2\xi^2\left(t + \zeta\frac{ux}{c^2}\right)^2 - \chi^2(x^2 + ut)^2 = c^2t^2 - x^2$$

$$c^2t^2\underbrace{\left(\xi^2 - \frac{u^2}{c^2}\chi^2\right)}_{=1} + 2tx\underbrace{\left(c^2\xi^2\zeta\frac{u}{c^2} - \chi^2 u\right)}_{=0} +$$

$$- x^2\underbrace{\left(\chi^2 - c^2\xi^2\zeta^2\frac{u^2}{c^4}\right)}_{=1} = c^2t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \dfrac{ct + \frac{u}{c}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\[2ex] x' = \dfrac{x + \frac{u}{c}ct}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\[2ex] y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Transformações de Lorentz

•) HW: $\frac{u}{c} \ll 1 \longrightarrow$ Galileo

•) $\frac{u^2}{c^2} \leq 1 \qquad u \leq c \qquad c$ = Velocidade limite

•) $t' \neq t$ não tem um relógio universal

Outro sistema de coordenadas: cone de luz

$$\begin{cases} x^+ \equiv x + ct \\ x^- \equiv -x + ct \end{cases}$$

$$c^2 t'^2 - x'^2 = (ct' - x')(ct' + x') = (x^+)'(x^-)'$$

$$(x^+)'(x^-)' = x^+ x^- \Rightarrow \text{Solução}$$

$$(x^+)' = e^{\varphi} (x^+)$$

$$(x^-)' = e^{-\varphi} (x^-)$$

$$\begin{cases} ct' = \frac{1}{2}\left((x^+)' + (x^-)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} x^+ + e^{-\varphi} x^-\right) \\ \quad = \mathrm{ch}\varphi \, ct + \mathrm{sh}\varphi \, x \\ x' = \frac{1}{2}\left((x^+)' - (x^-)'\right) = \mathrm{sh}\varphi \, ct + \mathrm{ch}\varphi \, x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\varphi & \mathrm{sh}\varphi \\ \mathrm{sh}\varphi & \mathrm{ch}\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

φ: Parâmetro de boost

$$x' = 0 \Rightarrow x = -ut$$

$$\mathrm{ch}\varphi \, x = -\mathrm{sh}\varphi \, ct$$

$$\Rightarrow \frac{u}{c} = \mathrm{tgh}\,\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi = \mathrm{tgh}^{-1}\left(\frac{u}{c}\right)}$$

relação entre boost e Veloc.

$$\mathrm{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{sh}\varphi = \frac{u/c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Adição de Velocidades

$$v' = \frac{dx'}{dt'} \underset{c=1}{=} \frac{dx+u\,dt}{dt+u\,dx} = \frac{\frac{dx}{dt}+u}{1+u\frac{dx}{dt}} = \frac{v+u}{1+uv} \neq v+u$$

Minkowski & a geometria do espaço-tempo

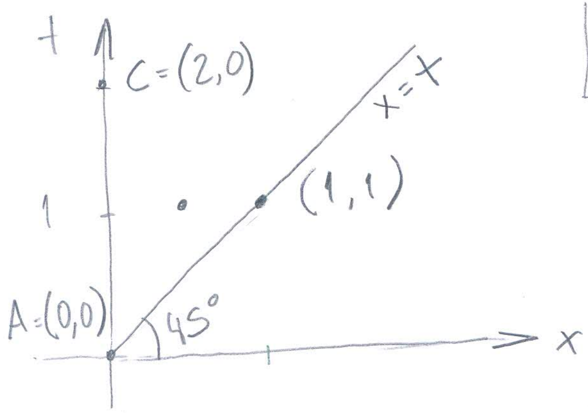
$$\underbrace{dl^2 = d\vec{x}^{\,2} = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_D^2}_{\text{Invariante sob Rotações } SO(D)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{ds^2 \underset{c=1}{=} -dt^2 + d\vec{x}^{\,2}}_{\text{Invariante sob Transf. de Lorentz}} \qquad (c\neq 1 \quad -c^2dt^2 + d\vec{x}^{\,2})$$

$$ds^2 = \begin{cases} <0 & : \text{tipo-tempo} \\ =0 & : \text{tipo-Luz ("null")} \\ >0 & : \text{tipo-Espaço} \end{cases}$$

⇒ Uma linha reta entre dois pontos ($\vec{x}, t$) no espaço-tempo não é necessariamente o caminho de distância mais curta

$$ds = \sqrt{dt^2 - dx^2}$$



$\boxed{B = (1, x<1)}$

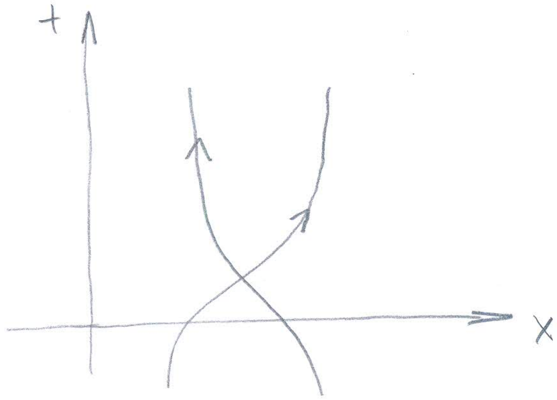
$$d_{AC} = \sqrt{2^2 - 0^2} = 2$$

$$d_{AB} = d_{BC} = \sqrt{1-x^2}$$

$$d_{AB} + d_{BC} = 2\sqrt{1-x^2} < 2 = d_{AC}$$

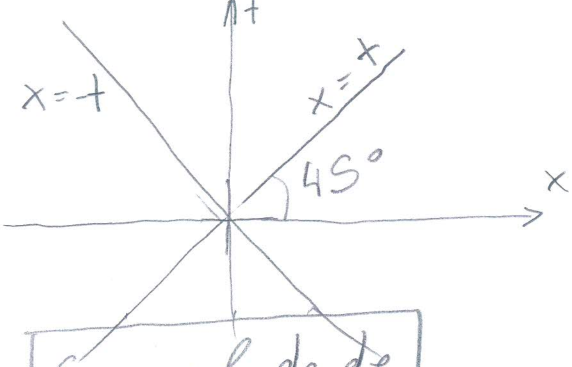
A distância mais curta : $x = 1$: $d_{AB} = d_{BC} = 0$

Partículas $\rightarrow$ "linhas-de-mundo" (worldline)



Cone - de - luz

$$ds^2 = 0 \Rightarrow dt^2 = \vec{dx}^2$$



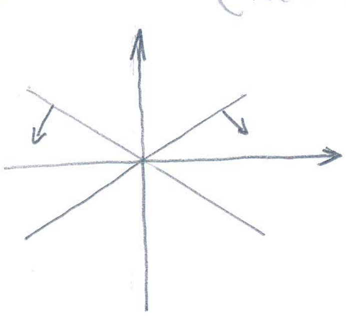
Partículas com massa se propagam dentro do cone de luz.

$\boxed{\text{Causalidade}}$

$dt^2 > dx^2$ (tipo tempo)

$c \rightarrow \infty$ (limite não-relativístico)

Cone de Luz "se abre"



Tempo próprio : referencial : $\vec{dx} = 0$

$$d\vec{\tau}^2 = dt^2 - \vec{dx}^2 = dt^2$$

Para um outro observador $dt^2 = -ds^2$ é a mesma coisa mas não vai ter significado de tempo

Distância

$$\int_A^C d\tau^2 = \int_A^C \sqrt{dt^2 - dx^2} = \int_A^C dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$= \int_A^C d\tau \sqrt{\frac{dt^2}{d\tau^2} - \frac{dx^2}{d\tau^2}}$$

linha reta

: distância máxima

$$\frac{dx}{d\tau} = 0$$

Métrica de Minkowski

tipo-tempo

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 < 0$$

$\sqrt{ds^2}$ = imaginário

$$d\tau^2 = -ds^2$$

$$\sqrt{-ds^2} = \sqrt{d\tau^2}$$

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= -\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

$$x^i = (x, y, z)$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3$$

$$x^0 = ct$$

$$x^0 = ct \overset{c=1}{=} t$$

$$x^i = (x, y, z)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

δ_{ij}

Métrica de Minkowski

$$dx^\mu = (c\,dt, \overbrace{dx, dy, dz}^{\vec{dx}})$$

"Vetor contra-variante" $\Rightarrow$ Vetor sob transf de Lorentz

$$P^2 = P \cdot P = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = -(P^0)^2 + (P^1)^2 + (P^2)^2 + (P^3)^2$$

$$\boxed{p_\nu \equiv \eta_{\mu\nu} p^\mu}$$

$$\left.\begin{aligned} p^\mu &= (p^0, \vec{p}^i) \\ p_\mu &= (p_0, p_i) = (-p^0, p^i) \\ p \cdot q &= \eta_{\mu\nu} p^\mu q^\nu = p_\nu q^\nu = -p^0 q^0 + \vec{p} \cdot \vec{q} \end{aligned}\right\} \circledast$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu} \longrightarrow \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{\text{métrica inversa}} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$$

$$\boxed{\text{Não existem } \cancel{\eta_\mu^\nu \quad \delta_{\mu\nu}} \quad \delta^{\mu\nu}}$$

$$SO(D) \longrightarrow SO(D-1, 1)$$

$$SO(3, 1)$$