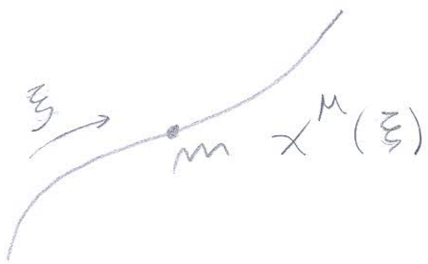
Relatividade - 13/04/16

$$S = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}$$

1) Invariante de Lorentz

$\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

2) Invariante sobre parametrizações



$$S = -m \int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi}}$$

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi}(\xi)$$

$$d\xi \longrightarrow \frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}\, d\tilde{\xi} = J\, d\tilde{\xi}$$

$$S = -m \int \cancel{J}\, d\tilde{\xi} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{\cancel{J}\, d\tilde{\xi}} \frac{dx^\nu}{\cancel{J}\, d\tilde{\xi}}}$$

E-L

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\delta L}{\delta \frac{dx^\mu}{d\xi}}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad m \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{L}\, \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\xi}\right) = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} d\tau^2 &= -\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \\ &= c^2 dt^2 - d\vec{x}^{\,2} \end{aligned}}$$

Escolha inteligente : $\xi = \tau$

← tempo próprio

$\Rightarrow L = -m$

Geodésica da part. livre no espaço plano

$$\frac{d}{d\tau}\left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0}$$

Completamento e promoção

Velocidade: $\vec{v}_{Newton} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\text{3-Vetor}}{\text{3-escalar}} = \frac{\text{Vetor em } D=3}{\text{Escalar em } D=3}$

$= \frac{\text{Vetor } D=3}{\text{Componente 0 de um 4-vetor}}$

$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (cx^0, \vec{x})$

3-Vetor = Vetor de $SO(3)$; 3-escalar $SO(3)$: $t \longrightarrow t' = t$

4-Vetor = Vetor de $SO(1,3)$

Promovido $\longrightarrow$ $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}$ $\longrightarrow$ é um 4-escalar: escalar sobre $SO(1,3)$

$d\tau \xrightarrow[\text{Lorentz}]{} d\tau' = d\tau$

$v_{rel}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ é um 4-vetor $= \frac{\text{4-Vetor}}{\text{4-escalar}} = $ 4-vetor

Conservação de Momento:

$$p^\mu = m v^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\sum_{a \in I} p_a^\mu = \sum_{a \in F} p_a^\mu$$

I: estados iniciais
F: estados finais

$$K^\mu = \sum_{a \in I} p_a^\mu - \sum_{a \in F} p_a^\mu = 0$$

$K'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu = 0$ (O momento é conservado p/ qualquer ref.)

$$(p^0, p^i) \longrightarrow (p^{0\prime}(p^0, p^i), p^{i\prime}(p^0, p^i))$$

p^0 & p^i não se misturam sob T. L.

p^0 & p^i mesmo se misturando devem ser conservados separadamente.

$\boxed{c=1}$ $\qquad\qquad$ $c \neq 1$

$$p^0 = m\frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1-\vec{v}_{Newton}^{\,2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{Newton}}{c}\right)^2}}$$

$$\simeq mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{v}_N}{c}\right)^2 + \dots\right)$$

$\left|\frac{\vec{v}_N}{c}\right| \ll 1$

$$= \underbrace{mc^2}_{\text{Energia de repouso}} + \underbrace{\frac{m}{2}\vec{v}_N^{\,2}}_{\text{energia não-relativística}} + \dots$$

$p^0 \equiv E$

$$\frac{\eta_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu}{d\tau^2} = \frac{-d\tau^2}{d\tau^2}$$

$$p^2 = \eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -(p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m\left(\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right)$$

$$= m\left(-\frac{d\tau^2}{d\tau^2}\right) = -m$$

→ 4-momento

$$\boxed{p^2 = -E^2 + \vec{P}^2 = -m^2}$$

→ "relação camada de massa"

Convenções

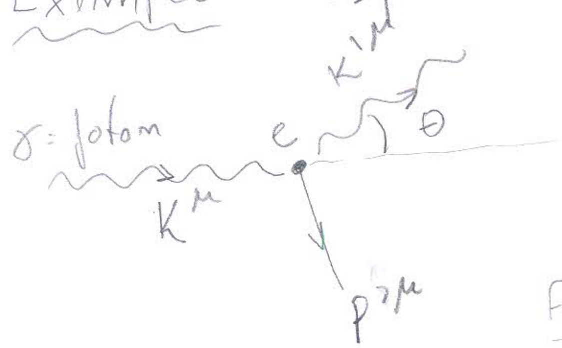
$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ "East coast" grav. e teoria de cordas

Usamos essa.

$\eta_{\mu\nu}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ "West coast" Fís. de partículas

→ $p^2 = +m^2$

Exemplo: Espalhamento Comptom



ref do laboratório

$p^\mu = (m, \vec{0})$ (4-momento antes da colisão: $\vec{P} = 0$)

Freq do fóton depois?

Fóton: K^μ, K'^μ → Depois ; → Antes ; Eléctron: p^μ, p'^μ → depois ; → Antes

→ $E = \hbar\omega$; $\vec{P} = \hbar\vec{K}$

$$\boxed{K^\mu + p^\mu = K'^\mu + p'^\mu}$$ conservação do 4-momento.

$$K^2 = K \cdot K = \eta_{\mu\nu} K^\mu K^\nu = 0$$

$K^\mu = (\omega, \vec{K})$: $\boxed{\omega^2 = \vec{K}}$ relação de camada de massa para o fóton

→ Vetor de onda

$$(K+p)^2 = (K'+p')^2$$

$$\underbrace{\cancel{K^2}}_{0} + \underbrace{p^2}_{-m^2} + 2K\cdot p = \underbrace{\cancel{K'^2}}_{0} + \underbrace{p'^2}_{-m^2} + 2K'\cdot p'$$

$$K \cdot p = K' \cdot p'$$

$$K' \cdot p = K' \cdot (K' + p' - K) = (K')^2 + \underbrace{K' \cdot p'}_{K \cdot p} - K' \cdot K$$

↳ $p + K = p' + K'$

$$= K \cdot p + K \cdot K'$$

$p^\mu = (m, \vec{0})$

$$k' \cdot p = k \cdot p + k \cdot k'$$

$$m\omega' = m\omega - (\omega'\omega - \vec{k}' \cdot \vec{k})$$

$$= m\omega - \omega'\omega(1 - \cos\theta)$$

$|\vec{k}| = \omega$

$|\vec{k}'| = \omega'$

$$\boxed{\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)}}$$

Cai na P2!, Possivelmente

Exemplo 2: Efeito Doppler relativístico.

Partícula de momento p^μ (ou p) emite um fóton de momento k^μ (ou k)

o fóton é absorvido por uma partícula de momento p'

$k \cdot p'$ é um escalar → Vai ser igual em todos os referenciais

→ calcular em ref. diferentes

Ref de repouso da partícula que emite:

$$\left.\begin{aligned} p &= (m, \vec{0}) \\ k &= (\omega, \vec{k}) \end{aligned}\right\} \to p' = m'\left(\frac{1}{\sqrt{1-v_N^2}}, \frac{\vec{v}_N}{\sqrt{1-v_N^2}}\right)$$

$\vec{v}_N$: vel. da partícula que absorve neste ref.

$$k \cdot p' = -\frac{m'(\omega - \vec{v}_N \cdot \vec{k})}{\sqrt{1 - v_N^2}}$$

Ref da partícula que absorve.

$p' = (m', 0)$ (m': massa da part. que absorve)

$k' = (\omega', \vec{k}')$

$$k \cdot p' = -m'\omega'$$

$$m'\omega' = m'\left(\frac{\omega - \vec{v}_N \cdot \vec{k}}{\sqrt{1 - v_N^2}}\right)$$

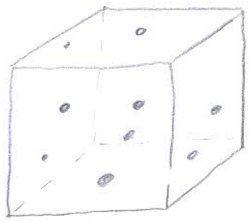
$v_N \cdot \vec{k} = \omega |\vec{v}_N| \cos\theta$

$\theta = 0$

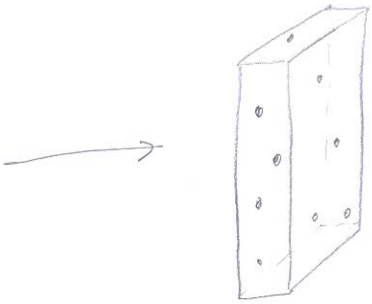
$\boxed{\text{Redshift}}$

Correntes

densidade de partículas

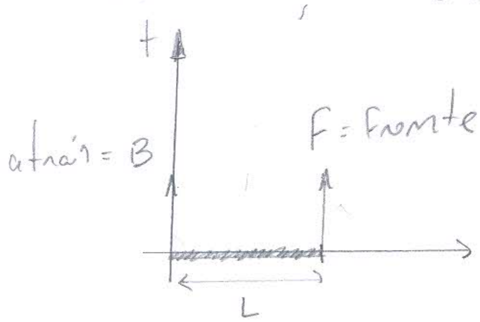


$n(t,\vec{x})$ = # de partículas para unidade de volume



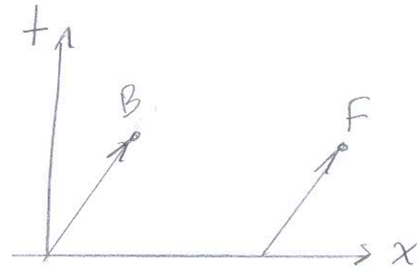
de partículas é o mesmo
o cubo está deformado por contração de Lorentz

Contração de Lorentz:



$(t,x)_B = (t,0)$

$(t,x)_F = (t,L)$



$$\hookrightarrow (t',x')_B = \left(\frac{t}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

$$(t',x')_F = \left(\frac{t+vL}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{L+vt}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

comp. da régua em $\mathcal{O}'$

$x_F' - x_B'$ a $t_F' = t_B'$

$(t_F' = 0) \rightarrow t = -vL$

$$x_F' = \frac{L+v(-vL)}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{1-v^2}\,.\,L < L$$

Densidade de número: $\dfrac{\#\text{ part}}{\text{Volume}} \rightarrow \dfrac{\#\text{ part.}}{\sqrt{1-v^2}\text{ Volume}} >$ densidade original

Sugere que a densidade de número seria a componente 0 de um 4-vetor. (Por causa de dilatações temporais)

$n^\mu(x) = (n^0(x), \vec{n}(x))$

$\hookrightarrow$ corrente

$\longrightarrow$ densidade de número de partículas

$\longrightarrow$ Corrente de Número

A repouso:

$n^\mu(x) = (n(x), \vec{0})$

Em Movimento (ao longo do eixo 1)

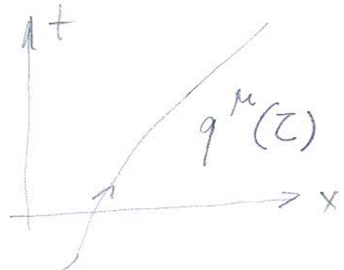
$$n^0 = \frac{n^0 + |\vec{v}|\, n^1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}} \geq n \qquad n'^1 = \frac{|\vec{v}|\, n^0 + n^1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{n|\vec{v}|}{\sqrt{1-v^2}} \geq n|\vec{v}|$$

Mais formalmente:

uma partícula em repouso na origem

$$\begin{cases} n(t,\vec{x}) = \delta^3(\vec{x}) \\ \int d^3\vec{x}\, n(t,\vec{x}) = 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Promoção relativística



$$\begin{cases} q^0(\tau) = \tau \\ \vec{q}(\tau) = 0 \\ d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu}\, dq^\mu dq^\nu \end{cases}$$

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \int d\tau\, \delta(x^0 - q^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x})$$

$$= \int d\tau\, \frac{dq^0}{d\tau}\, \delta(x^0 - q^0(\tau))\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{q}(\tau))$$

$$\begin{cases} \frac{dq^0}{dt} = 1 \\ \vec{q} = 0 \end{cases}$$

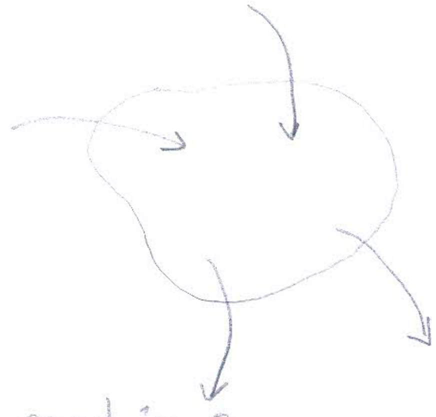
$$= \int d\tau\, \frac{dq^0}{d\tau}\, \underbrace{\delta^{(4)}(x - q(\tau))}_{\text{Invariante de Lorentz}}$$

$$\boxed{\eta^\mu(x) = \int d\tau \, \frac{dq^\mu}{d\tau} \, \delta^{(4)}(x - q(\tau))}$$ Vetor sobre $SO(1,3)$

conservação:

$$\partial_\mu m^\mu = \frac{\partial m^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial m^0}{\partial t} + \frac{\partial m^i}{\partial x^i}$$

$$= \frac{\partial m^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{m} = 0$$



Checagem: soma sobre partícula

$$\partial_\mu m^\mu(x) = \partial_\mu \sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau^a} \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

$$= \sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau^a} \underbrace{\partial_\mu \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))}_{= -\frac{\partial}{\partial q_a} \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))}$$

$$= -\sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau^a} \frac{\partial}{\partial q_a} \delta^{(4)}$$

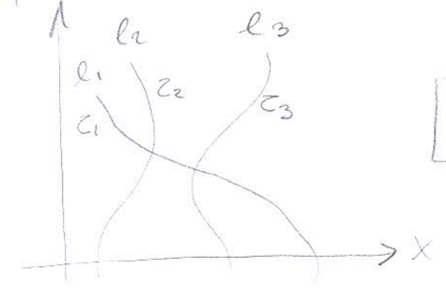
$$= -\sum_a \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a)) \Big|_{\tau_a = -\infty}^{\tau_a = \infty} = 0$$

$$\left(\text{pois } q_a^0(\pm\infty) = 0\right)$$

Corrente eletromagnético:

$$J^\mu(x) = \sum_a e_a \int d\tau_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau_a} \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

cargas das partículas



$\boxed{x = q_a(\tau_a)}$ $J^\mu = (\rho, \vec{j})$

densidade de carga — corrente