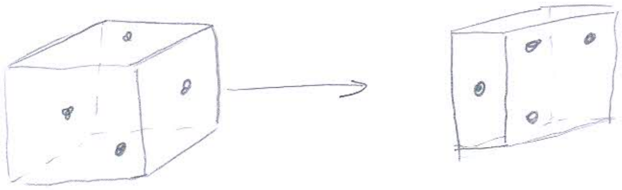
Relatividade - 18/04

Densidade de energia   Energia / Volume

$\rho(t, \vec{x})$ é um 3-escalar na física não-relativística
(= sob $SO(3)$)

Sobre uma T.L.?



1) Caixa tem contração de Lorentz

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ $(c=1)$ " $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \longleftrightarrow$ componente 0 "

2) Energia das partículas muda

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

ρ deve ser promovido à componente 00 de um tensor

$T^{\mu\nu}$ = tensor de (densidade) energia - momento
ou
tensor de "stress"

$$T^{00} \rightarrow (T^{00})' = \Lambda^0{}_\mu \Lambda^0{}_\nu T^{\mu\nu} \overset{T^{00} \neq 0}{=} \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_0 T^{00} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2 T^{00}$$

$$T^{\mu\nu} = \sum_a \int d\tau_a \, m_a \frac{dq_a^\mu}{d\tau_a} \frac{dq_a^\nu}{d\tau_a} \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a))$$

$\cdot)$ $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ $\quad \frac{4.5}{2} = 10$ componentes $\left(\frac{D(D+1)}{2} \right)$

D # de dimensões do espaço tempo.

$\cdot)$ $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$T^{00} \rightarrow$ densidade de energia

$$\int dx \left[T^{0\nu} \rightarrow \sum_a \int d\tau_a \, m_a \frac{dq^0}{d\tau_a} \frac{dq^\nu}{d\tau_a} \delta^{(4)}(x - q_a(\tau_a)) \right]$$

$$= \sum_a \int d\tau_a \, d\vec{x} \, m_a \frac{dq^0}{d\tau_a} \frac{dq^\nu}{d\tau_a} \delta(\vec{x} - q_a(\tau_a)) \, \delta^{(3)}(x - q_a(\tau_a))$$

$$= \sum_a \int d\tau_a \frac{dq_a^0}{d\tau_a} p_a^\nu \, \delta(x^0 - q_a^0(\tau_a))$$

$= \sum_a p_a^\nu = P^\nu$ momento total em V

stokes/ Gauss

T^{ij} : $\frac{d}{dt} P^\nu(t) = \int_V d\vec{x} \frac{\partial}{\partial t} T^{0\nu} = - \int_V d\vec{x} \frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^i} =$

$$\begin{cases} \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \\ \partial_0 T^{0\nu} + \partial_i T^{i\nu} = 0 \end{cases}$$

$$= - \int_{\partial V} dS_i \, T^{i\nu}$$

∂V = borda do espaço V

$\boxed{\nu = j}$ $\underbrace{\frac{d}{dt} P^j(t)}_{\text{força}} = \underbrace{-\int_{\partial V} dS_i \, T^{ij}}_{T^{ij} \cdot \text{Área}}$

"$T^{ij} = \frac{\text{força}}{\text{Área}} = \text{Pressão}$"

↳ Pressão na direção (j) exercida por uma força na direção (i)

Ação de uma partícula relativística livre

(no espaço tempo de Minkowski)

$$\begin{cases} S = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (c = 1) \\ \quad = -m \int \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} \end{cases}$$

Não tem interações!

Introduzir V de volta?

Duas opções: (Propostas)

(E) $S_E = -\int \left(m\sqrt{-\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} + V(\vec{x}) dt \right)$

$V(\vec{x})$ fora da raiz

dt e dt^2 não são inv. de Lorentz!

(G) $S_G = -m \sqrt{\left(1 + \frac{2V}{m}\right) dt^2 - d\vec{x}^2}$

$V(\vec{x})$ dentro da raiz

Problema: Não são invariantes de Lorentz!

(Vamos resolver esse problema depois.)

O Limite relativístico funciona:

(E) OK óbvio

(G) $|d\vec{x}| << dt$ $(|\vec{v}| << 1 = c)$

$$S = -m \int \sqrt{1 + \frac{2V}{m}}\, dt - \frac{d\vec{x}}{2\sqrt{1+\frac{2V}{m}}\, dt}$$

$\boxed{V << m}$ $\sqrt{1+\frac{2V}{m}} \simeq 1 + \frac{V}{m}$

$$S_G \simeq \underbrace{-m \int \left(1 + \frac{V}{m}\right) dt}_{-\cancel{m\int dt} - \int V(\vec{x})\, dt} + \underbrace{\int dt\, \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2}_{\text{OK!}}$$

OK!

Precisamos de "promoção"

(E) $V(\vec{x})\, dt \longrightarrow A_0\, dt \rightarrow A_0\, dt - A_i\, dx^i$

$\boxed{A_\mu dx^\mu}$ invariante de Lorentz

$$\boxed{S_E = \int \left(-m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} + A_\mu(x)\, dx^\mu\right)}$$

$A_0 = -V$

(G) $-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \longrightarrow \left(1+\frac{2N}{m}\right)dt^2 + d\vec{x}^{\,2}$

$$\downarrow$$

invariante de Lorentz $\boxed{g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu}$

$$S_G = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu}$$

(E) $\longrightarrow$ Eletromagnetismo

(G) $\longrightarrow$ Gravidade

Eletromagnetismo:

$$S_E = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}\, d\xi + \int A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\xi}\, d\xi$$

Eqs. de Euler-Lagrange

(i) $$\delta\Big(-m \int d\xi \underbrace{\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\xi}\frac{dx}{d\xi}}}_{L/m}\Big)$$

$$\underset{\xi=\tau}{=} m \int d\tau\, \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^\nu}\frac{d}{d\tau} x^\nu$$

$\boxed{L=-m \quad \sqrt{\cdots}=-1}$

$$\underset{\text{por partes}}{=} -m \int d\tau\, \eta_{\mu\rho} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\, \delta x^\rho$$

(ii) $$\delta \int d\tau\, A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = \int d\tau \left(A_\mu \frac{d\,\delta x^\mu}{d\tau} + (\partial_\nu A_\mu)\, \delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau}\right)$$

$$\delta A_\mu(x) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,\delta x^\nu \qquad (ii) = \int d\tau \left(A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} + (\partial_\nu A_\mu)\,\delta x^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \right)$$

$$= \partial_\nu A_\mu\,\delta x^\nu$$

$$\Rightarrow (ii) = \int d\tau \left(-\left(\frac{d}{d\tau} A_\mu\right) \delta x^\mu + \partial_\nu A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau}\,\delta x^\nu \right)$$

$$= \int d\tau \left(\partial_\mu A_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}\,\delta x^\mu - \partial_\nu A_\mu \frac{dx^\nu}{d\tau}\,\delta x^\mu \right)$$

$$\int \underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{\equiv F_{\mu\nu}} \frac{dx^\mu}{d\tau}\,\delta x^\mu$$

$$\delta S_E = \int d\tau \left(-m\,\eta_{\mu\rho} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}\,\delta x^\rho + \underbrace{F_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}\, dx^\mu}_{F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\mu\rho}\,\delta x^\rho} \right)$$

$$= \int d\tau \underbrace{\left(-m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)}_{=0} \eta_{\mu\rho}\,\delta x^\rho$$

$$\Rightarrow \boxed{m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv f^\mu}$$ Força de Lorentz.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_{0i} = -E_i} \qquad \boxed{\epsilon_{ijk} F_{jk} = B_i}$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B^3 = F^{12} = F_{12} = B^z \\ B^2 = F^{31} = F_{31} = B^y \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \text{Campo elétrico} \\ \vec{B} = \text{Campo magnético} \end{cases}$$

<u>Notem</u>: $\vec{E}$ & $\vec{B}$ <u>Não</u> são as componentes espaciais de um 4-vetor! São unificados em um tensor de ordem 2 antissimétrico !!!

Ex: 2+1 dimensões (t, x, y)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y \\ E_x & 0 & B_z \\ E_y & -B_z & 0 \end{pmatrix}$$

$(-E_x, -E_y) \longrightarrow$ Vetor

$B_z \rightarrow B$ é escalar!

<u>$\mu = 1$</u> $\quad m \dfrac{d^2 x^1}{d\tau^2} = F^1{}_\nu \dfrac{dx^\nu}{d\tau}$

$$\left(\frac{d}{d\tau}\left(m \frac{dx^1}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} p^1 = -F^{10}\frac{dx^0}{d\tau} + F^{12}\frac{dx^2}{d\tau} + F^{13}\frac{dx^3}{d\tau} \right.$$

$$\left. = E^1 \frac{dx^0}{d\tau} + B^3 \frac{dx^2}{d\tau} + B^2 \frac{dx^3}{d\tau} \right) \times \frac{d\tau}{dt} \quad \text{(toda a eq.)}$$

$\mu = 2, \mu = 3$ (HW)

$\boxed{e=1}$ $\quad \boxed{\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}}$ Força de Lorentz, $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$

$\boxed{\mu = 0} \longrightarrow$ Eq. de Continuidade (HW)

Maxwell?

Ação para A_μ? A_μ . $\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

A_μ ainda não dinâmico

$$S = \int \left(-m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} + \underbrace{e A_\mu dx^\mu}_{\text{Não é dinâmico}} \right) + ?$$

Como deixar A_μ dinâmico?

$\int A_\mu dx^\mu$ é invariante de Lorentz.

Também tem uma outra invariância

$$\boxed{A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)} \quad \begin{matrix}\Lambda \to 0 \\ \tau \to +\infty\end{matrix}$$

$$\int A_\mu dx^\mu \longrightarrow \int A_\mu dx^\mu + \int (\partial_\mu \Lambda) dx^\mu$$

$$= \int A_\mu dx^\mu + \int d\Lambda = \int A_\mu dx^\mu + \underbrace{\Lambda \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty}}_{\to 0}$$

Transf. de Gauge
(Calibre)

$F_{\mu\nu}$ é invariante de Calibre

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow \partial_\mu (A_\nu + \partial_\mu \Lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \Lambda)$$

$$= F_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda}_{=0}$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \begin{cases} \text{é inv. Lorentz} \\ \qquad \text{Gauge} \\ \text{2 derivadas} \end{cases}$$

$$\boxed{S_{Maxwell} = \int \left(-m\sqrt{\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu} + e A_\mu dx^\mu \right) - \frac{1}{4}\int d^4x \, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

(ii) (i)

Similar à:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 - \int d\vec{x}\, m\, \delta^{(3)}(x - q(\tau))\, \Phi - \int d\vec{x} \frac{1}{8\pi G} (\nabla \Phi)^2 \right)$$

Eq do movimento

Variação com respeito a partícula <u>OK</u>: Força Lorentz

Variação com respeito a A_μ

(Integral sobre todo o espaço)

$$(i)\ \delta\left(\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\right) = -\frac{1}{4}\int d^4x\, \underbrace{\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}_{2F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}}$$

$$(HW) = 4F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu$$

por partes (HW)

$$= -\int d^4x\, \partial_\mu F^{\mu\nu}(x)\, \delta A_\nu(x)$$

$$(ii)\ A_\mu(\bar{x}) = \int d^4x\, \delta^{(4)}(x - \bar{x}) A_\mu(x)$$

(Integral sobre a linha de mundo)

$$\int A_\mu(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau} d\tau$$

$$= \int d^4x\, d\tau\, A_\mu(\bar{x})\, \delta^{(4)}(x - \bar{x}) \frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau}$$

$$\delta(\ ) = \int d^4x \underbrace{\left(e \int d\tau\, \delta^{(4)}(x-\bar{x}) \frac{d\bar{x}^\mu}{d\tau}\right)}_{J^\mu(x)} \delta A_\mu(x)$$

(ii) $\int d^4x\, J^\mu(x)\, \delta A_\mu(x)$

(i) + (ii) $\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu}$

Eqs de Maxwell

$\boxed{\nu = 0}$

$$\partial_i F^{i0} = -\partial_i E^i = -\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -J^0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho}$$

$\boxed{\nu = i}$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}} \quad (HW)$$

As equações homogêneas são identidades

$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$; $\epsilon^{0123} = +1$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\nu F_{\lambda\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}(\partial_\nu \partial_\lambda A_\sigma - \partial_\nu \partial_\sigma A_\lambda)$$

$$= 2\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \partial_\nu \partial_\lambda A_\sigma = 0$$

$\mu = 0 \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$

$\mu = i \longrightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ (HW)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{J} = 0$$

$$\partial_\nu(\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu) \longrightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

$\hookrightarrow \boxed{\partial_\nu J^\nu = 0}$ Conservação da Corrente