Relatividade. 27/04/16

Princípio de equivalência (P.E.)

Localmente (= em uma pequena região do espaço) nenhum experimento pode diferenciar entre um campo gravitacional e referencial acelerado

→ gravidade é especial entre as forças porque é universal / é a geometria do espaço-tempo

$$\boxed{\text{Gravidade} = \text{geometria}}$$

P.E. fraco (WEP)

massa inercial = massa gravitacional

m_i : $\vec{F} = m_i \vec{a}$ → universal

m_g : $\vec{F_g} = -m_g \vec{\nabla}\phi$ → especifica a gravidade

Galileo, Eötvos, ... : $\boxed{m_i = m_g}$

$$\vec{F} = m_i \vec{a} = -m_g \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \vec{a} = -\frac{m_g}{m_i}\vec{\nabla}\phi$$

$$\boxed{\vec{a} = -\nabla\phi}$$ → Somente gravidade: $\vec{F} = \vec{F_g}$

"queda livre" é universal

$\underbrace{\text{"queda livre"}}$ → Não tem força exceto a gravidade

*) Formulação equivalente

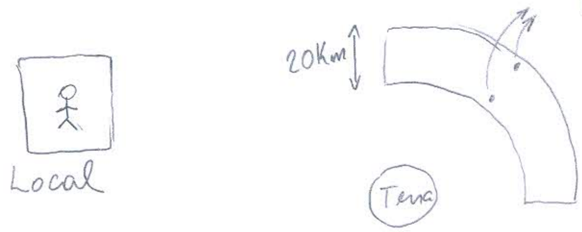
∃ trajetórias chamadas de trajetórias "inerciais" (ou de queda livre) percorridas por partículas não aceleradas (= aceleradas somente pela gravidade)

Não seria verdade para o E/M

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \qquad \vec{F} = \vec{F_e} = e\vec{E} = -e\vec{\nabla}\phi_e$$

$$\vec{a} = \frac{e}{m_i}(-\vec{\nabla}\phi_e)$$

↳ Depende da partícula



Posso medir irregularidades do campo gravitacional

P. E. Einstein

Localmente, as leis da física se reduzem às leis da relatividade restrita e é impossível detectar um campo gravitacional com experimentos locais.

A gravidade se acopla universalmente a qualquer forma de energia/momento. (não necessariamente massa)

Aceleração e forças fictíceas

*) Newton   partícula livre em 1D
$\hookrightarrow \vec{F}=0 \rightarrow \vec{a}=0$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

$\rightarrow$ Referencial acelerado $y = x - \frac{1}{2}at^2$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} - a = 0$$

$\rightarrow$ o observador vê uma "força" $\propto ma$

*) Relativístico

$$d\tau^2 = -\eta_{\rho\sigma}\, dx^\rho dx^\sigma$$

$$\hookrightarrow \frac{d^2y^\rho}{d\tau^2} = 0 \longrightarrow \text{ref. acelerado : T.G.C.}$$
$$y^\rho(x)$$

$$\frac{dy^\rho}{d\tau} = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$\frac{d^2y^\rho}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$

Multiplico por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}$ e $\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu$

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \underbrace{\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\rho}\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\text{Força "fictícea"} \rightarrow \text{Christoffel!}} = 0$$

$$ds^2 = \eta_{\rho\sigma}\, dy^\rho dy^\sigma = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

"observador y" vê a métrica de Minkowski

"observador x" vê a métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu}$$

Símbolo de Christoffel = "força" atribuída a gravidade

Coordenadas localmente planas =

= referencial localmente inercial

espaço curvo ⟶ espaço-tempo curvo

Coord. localmente planas ⟶ Coord. localmente Minkowski

$$\delta_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$$

localmente:

$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$ ⟶ localmente $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$

$$\boxed{\underbrace{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}}_{} = 0}$$

partícula "livre" (= somente sujeito a gravidade)

$$\Big(\quad " \quad \Big) = \mathcal{F}^\mu$$ na presença da gravidade + a força $\mathcal{F}^\mu$

Limite NR $\longrightarrow$ eq. de Newton

1) velocidades pequenas $\frac{dx^i}{d\tau} << \frac{dx^0}{d\tau}$

2) Campo gravitacional fraco: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2)$

3) $h_{\mu\nu}$ não depende do tempo

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{0i}\underbrace{\cancel{\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau}}}_{1)}{}^{\to 0} + 2\Gamma^\mu_{ij}\underbrace{\cancel{\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}}}_{1)}{}^{\to 0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \overset{N}{=} 0 \qquad 1)$$

2) e 3) $\quad \Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{\sigma 0} - \partial_\sigma g_{00})$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu{}_\rho$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \qquad = (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\rho} + h_{\nu\rho})$$

$$= \underbrace{\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}}_{\delta^\mu_\rho} + \underbrace{\eta^{\mu\nu}h_{\nu\rho} - h^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}}_{=0} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\sigma} - h^{\mu\sigma})\Big(2\underbrace{\partial_0(\cancel{\eta_{0\sigma}} + h_{0\sigma})}_{=0 \ 3)} - \partial_\sigma\underbrace{(\cancel{\eta_{00}} + h_{00})}_{=0 \ 3)}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(-\partial_\sigma h_{00}) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\eta^{00}(-\partial_0 h_{00}) = 0$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} \qquad (\eta^{ii} = +1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \rightarrow \dfrac{dx^0}{d\tau} = \text{const.} \\ \dfrac{d^2x^i}{d\tau^2} \simeq \dfrac{1}{2}\partial_i h_{00} \underbrace{\left(\dfrac{dx^0}{d\tau}\right)^2} \end{cases}$$

$\rightarrow dx^i << dx^0 \rightarrow x^0 \simeq \tau \rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} \simeq 1$

$$\boxed{h_{00} = -2\phi = 2\frac{GM}{r}} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi} \quad (c=1)$$

Simetria esférica ($\rightarrow$ estrelas esféricas)

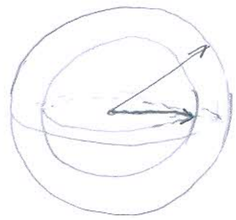
Sem equações do movimento

*) Não estático (estrela pulsando)

$\rightarrow$ dependência em t

rot. $SO(3)$

Isotropic = invariância rotacional



$\hookrightarrow dt \qquad d\vec{x}^2$

$\vec{x}\cdot\vec{dx}$

$(t, \vec{x}) \qquad ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

$$dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) = dr^2 + r^2\, d\Omega_2^2$$

$r^2 = \vec{x}^2$

$d(r^2) = d(\vec{x}^2)$

$2r\,dr = 2\vec{x}\cdot\vec{dx} \longrightarrow r\,dr = \vec{x}\cdot\vec{dx}$

$$\boxed{\begin{matrix} dt^2 \\ dt\cdot dr \\ dr^2 \\ d\Omega_2^2 \end{matrix}}$$

$$ds^2 = -U(t,r)\,dt^2 - 2V(t,r)\,dt\,dr + W(t,r)\,dr^2 + (X(t,r))^2 d\Omega_2^2$$

$f = f(t,r)$ não θ, ϕ!

Transf. de coordenadas:

$r \to \tilde{r} = X(t, r)$ $\qquad (t, \tilde{r}, \theta, \phi)$

$d\tilde{r} = \partial_t X \, dt + \partial_r X \, dr$

$ds^2 = -\tilde{u}(t, \tilde{r}) dt^2 - 2\tilde{v}(t, \tilde{r}) dt d\tilde{r} + \tilde{w}(t, \tilde{r}) d\tilde{r}^2 +$
$+ \tilde{r}^2 d\Omega_2^2$

③ funções de 2 variáveis

esquecendo os ~. & redefinindo o tempo $t \to \tilde{t}$

$d\tilde{t} = \xi(t, r)(u\,dt + v\,dr)$

$= \partial_t \phi \, dt + \partial_r \phi \, dr$ para algum $\phi(t, r)$

$\partial_t \partial_r \phi = \partial_r \partial_t \phi$

$\to \partial_t(\xi v) = \partial_r(\xi u)$

$\to$ posso determinar $\xi(t, r)$ conhecendo u, v & $\xi(0, r)$

$-u\,dt^2 - 2v\,dt\,dr \longrightarrow \underbrace{-(\xi^2 u)^{-1}}_{A} d\tilde{t}^2 + Y(\tilde{t}, r) dr^2$

$$\boxed{ds^2 = -A(t, r) dt^2 + B(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega_2^2}$$

↳ $g_{\mu\nu}$: ~~10~~ 2 funções de ~~4~~ 2 variáveis → Usando a simetria esférica e T.G.C.

Estático

$A = A(r)$ e $B = B(r)$

$$\boxed{A(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} 1 - \frac{2GM}{r}}$$ Para recuperar Minkowski assintótico