

# Relatividade - 16/05

## Identidade de Bianchi

$$D_\nu R^\rho_{\mu\sigma\lambda} = D_\nu (\partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\kappa\sigma} \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} - (\mu \leftrightarrow \nu))$$

Coordenadas Localmente planas

$$\Gamma = 0 \quad \partial \Gamma \neq 0$$

$$\Rightarrow D_\nu R^\rho_{\mu\sigma\lambda} \stackrel{\text{Localmente plana}}{=} \partial_\nu \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\nu \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \\ = \partial_\nu R_{\rho\mu\sigma\lambda}$$

Permutação cíclica  
 $+(\nu\sigma\lambda) - (\nu\lambda\sigma)$

$$\rightarrow \left( D_\nu R_{\rho\mu\sigma\lambda} + D_\sigma R_{\rho\mu\lambda\nu} + D_\lambda R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0 \right) \cdot g^{\rho\sigma}$$

Identidade tensorial

$$\rightarrow \left( D_\nu R_{\mu\lambda} + D^\rho R_{\rho\mu\lambda\nu} - D_\lambda R_{\mu\nu} = 0 \right) \cdot g^{\mu\lambda}$$

$$\rightarrow D^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0$$

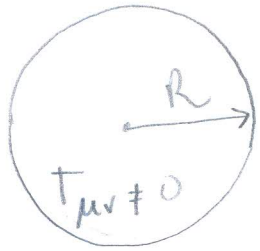
as equações de Einstein não são todas independentes

Schwarzschild:

$$\left. \begin{array}{l} R_{tt} = 0 \\ R_{rr} = 0 \\ R_{\theta\theta} = 0 \end{array} \right\} \text{vs. } \begin{array}{l} A(r) \\ B(r) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} R_{tt} = 0 \\ R_{rr} = 0 \\ R_{\theta\theta} = 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{Explicita porque o sistema não é} \\ \text{sobre determinado} \end{array}$$

# Métrica de Schwarzschild

$$d\Omega^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$



$r > R \rightarrow \text{v\u00e1cuo}$

$$R_{\mu\nu} = 0$$

$$T_{\mu\nu} = 0$$

1 par\u00e2metro:  $M$

\* est\u00e1tica (n\u00e3o tem depend\u00eancia em  $t$ , n\u00e3o tem  $dx^i$ )

\* Sim\u00e9trica

\*  $M \rightarrow 0$  Minkowski

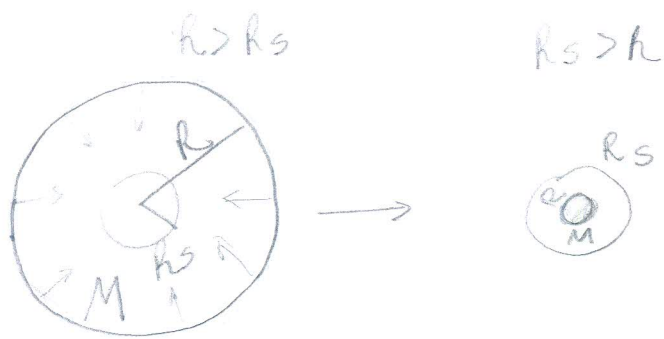
\*  $r \rightarrow \infty$  Minkowski

\* Kretschmann:  $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48 G^2 M^2}{r^6}$

$$\begin{cases} r = 0 \\ r = r_s = 2GM \end{cases}$$

## Teorema de Birkhoff

A Solu\u00e7\u00e3o de Schwarzschild continua valendo mesmo para distribui\u00e7\u00f5es esf\u00e9ricas dependentes de tempo.



Demonstração:

$A(r, t)$      $B(r, t)$  → Símbolos de Christoffel extra

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{\dot{A}}{2A} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{\dot{B}}{2B} \quad \Gamma_{tr}^r = \frac{\dot{B}}{2B} \quad \boxed{\cdot = \frac{\partial}{\partial t}}$$

↳ equação extra

$$R + r = 0 = \frac{\dot{B}}{rB} \Rightarrow B = \text{const. no tempo}$$

$$\Rightarrow A = \text{const. no tempo}$$

Estratégia para pontos singulares

Escalar de curvatura que diverge  $\rightarrow \infty$   
(o ponto onde  $\rightarrow \infty$  deve ser a uma distância finita)

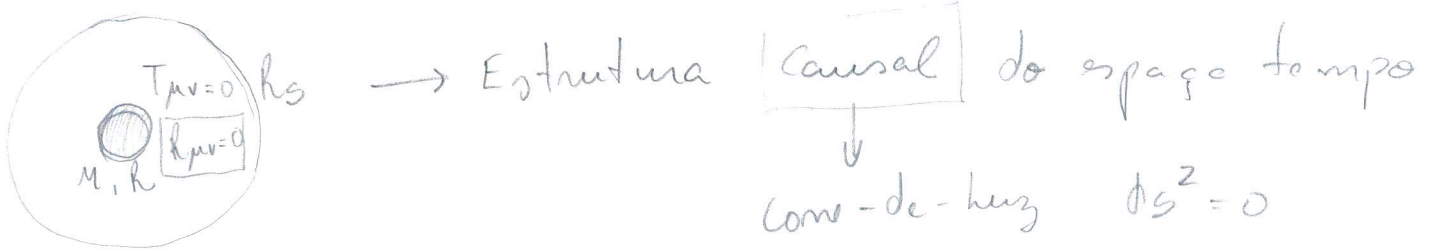
$\Rightarrow$  o ponto é singular

Schwarzschild

$r=0$  é singular

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 M^2}{r^6} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

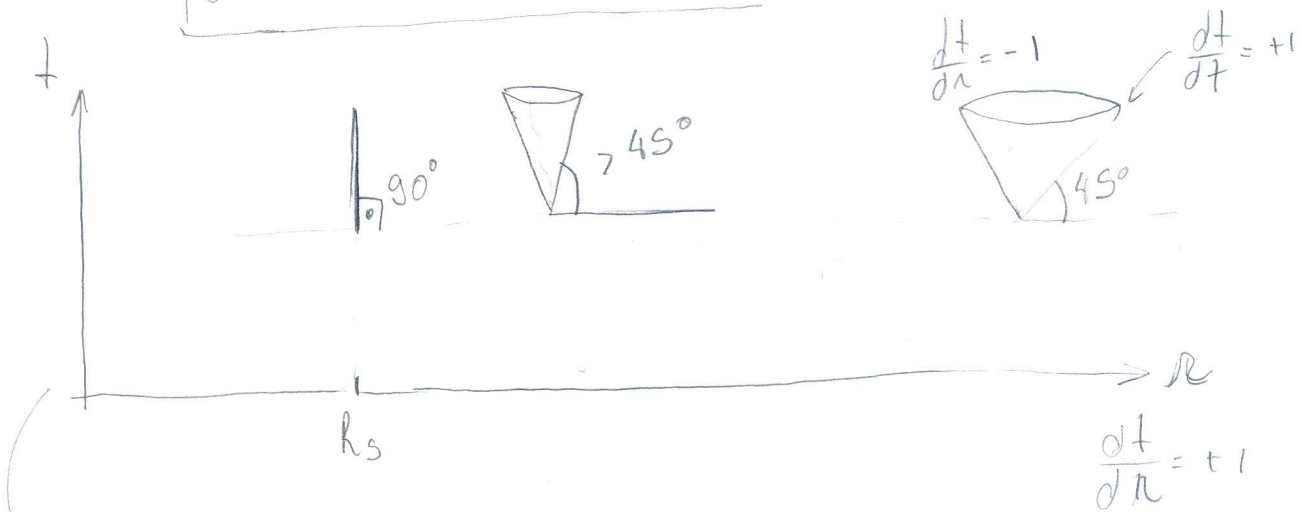
$r = r_s$  ainda não demonstramos que é regular!



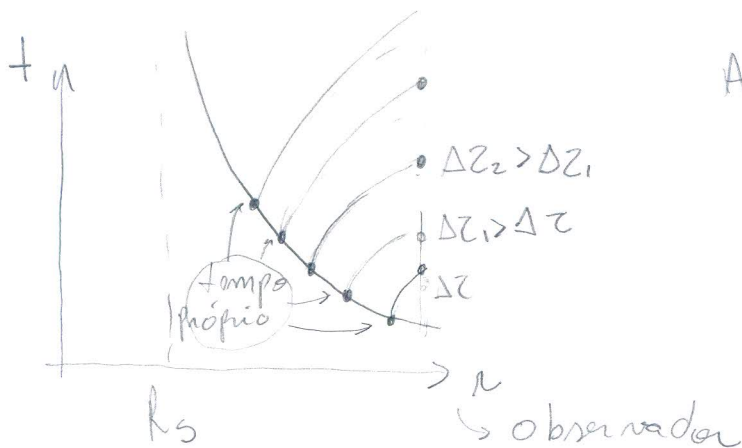
$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \text{const} \\ \varphi = \text{const} \end{array} \right.$  → Curvas nulas radiais

$$0 = ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}$$

$$\boxed{\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}}$$



Um raio de luz parece não poder alcançar  $r_s$   
 → Ilusão devida às coordenadas



Aparentemente, para o observador externo, o medidor nunca atinge o  $r_s$ .

→ Mudar de coordenadas! (Ver o que acontece com o medidor)

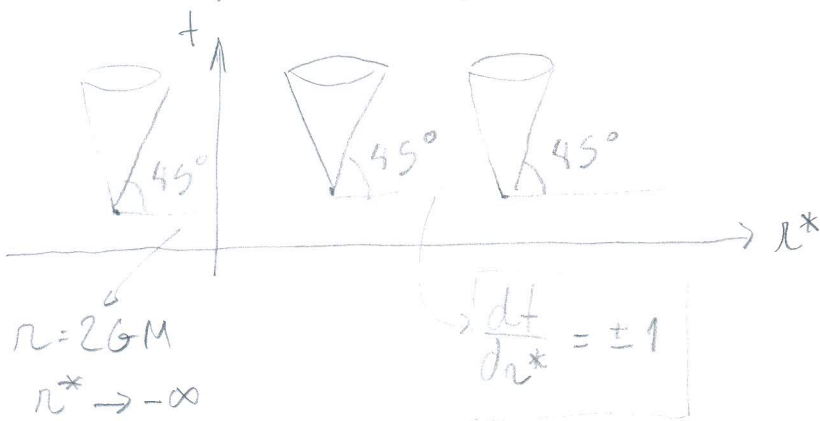
" $\frac{dt}{dr} \rightarrow \infty$  mais devagar"

† → Uma nova coordenada que muda mais devagar ao longo de geodésicas nulas.

$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \rightarrow$  Solução:  $t = \pm r^* + \text{const}$   
 ↳ tortoise (tortoise)

$r^* = r + 2GM \ln\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)$  válida para  $r > 2GM$  (HW)

$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2$



$r = r_s$  agora é a  $r^* \rightarrow -\infty$

Mais uma mudança

→ Coordenadas adaptadas ao cone de luz

$v = t + r^*$

$w = t - r^*$

transf. de coord.

$(r, t)$  - Schwarzschild



$(r^*, t)$  - tortoise



$(v, u)$



$(r, v)$  - Eddington-Finkelstein (EF)

$v = \text{constante} \rightarrow$  Geodésica nula "in falling"

$u = \text{constante} \rightarrow$  Geodésica nula "outgoing"

$$v = t + r^*$$

$$dv = dt + dr^*$$

$$dt = dv - dr^* = dv - \left( dr + \frac{2GM}{\frac{r}{2GM} - 1} \frac{1}{2GM} dr \right)$$

$$= dv - dr \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1}$$

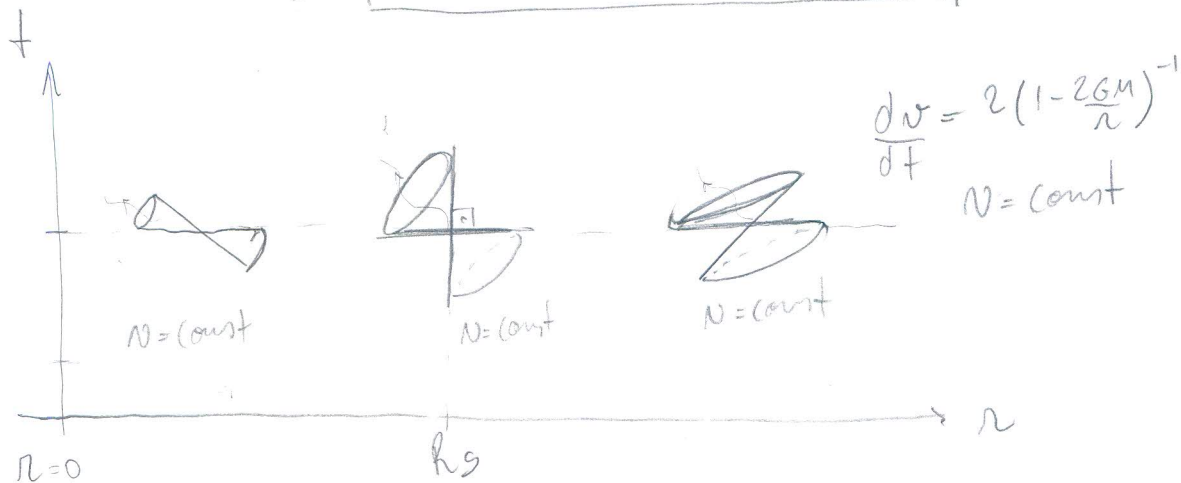
$$\Rightarrow ds^2 = \dots = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

$\uparrow$  (HW)

$$\det g_{\mu\nu} = \det \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = -r^4 \sin^2 \theta \neq 0$$

$$\begin{cases} \theta = \text{const} \\ \varphi = \text{const} \end{cases} \rightarrow ds^2 = 0 \quad 2dvdr = \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \rightarrow v = \text{const. in falling} \\ 2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & \rightarrow \text{outgoing} \end{cases}$$



$r < 2GM$  : Todos os caminhos no futuro vão na direção de  $r$  decrescente

$r = 2GM$  : Localmente é regular  
Globalmente  $\rightarrow$  Superfície de "no-return"

Superfície Nula  $\rightarrow$  Horizonte de Eventos  
 $\hookrightarrow r < R_s$  : Buraco Negro

Eddington - Função de Schwarzschild  $\rightarrow$  Novas coordenadas