Relatividade 08/06

Cosmologia

Isotropia no mesmo lugar (em largas escalas > 300 M ly) anos-luz

\+ Princípio cosmológico = não estamos em um lugar privilegiado

$\boxed{\text{Isotropia em qualquer lugar}}$ $\Rightarrow$ homogeneidade

Universo = isotrópico + homogêneo

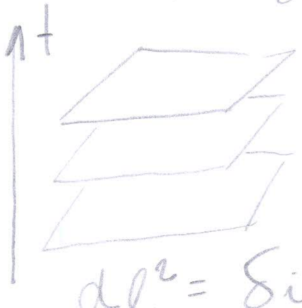
3 classes de espaços-tempos

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Folha a $t = \text{const.}$

Σ_t 3 dimensões espaciais

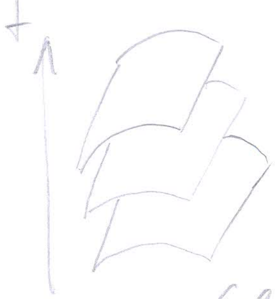
Curvatura: zero, positiva const., negativa const.



curvat. zero

$$dl^2 = \delta_{ij}\, dx^i dx^j \quad E^3 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

$$= d\vec{x}^{\,2}$$

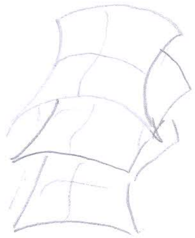


Mergulho de uma esfera em $\mathbb{R}^4$

$$\underbrace{dl^2 = du^2 + d\vec{x}^{\,2}}\qquad \vec{x}^{\,2} + u^2 = a^2$$

↳ vínculo

Sela



Mergulho de um hiperbolóide H^3 em $\mathbb{R}^3$

$$dl^2 = d\vec{x}^{\,2} - du^2$$

$$\vec{x}^{\,2} - u^2 = -a^2$$

redefinição de coordenadas:

$$\begin{cases} \vec{x} \to a\vec{x} \\ u \to au \end{cases}$$

$\vec{x}, u \to$ adimensionais

$[a] = L$

$$\boxed{dl^2 = a^2\left(d\vec{x}^{\,2} \pm du^2\right)}\qquad \boxed{x^2 \pm u^2 = \pm 1}$$

$$d\left(\vec{x}^{\,2} \pm u^2 = \pm 1\right)$$

$$\vec{x}\cdot d\vec{x} = \mp u\, du$$

$$dl^2 = a^2\left(d\vec{x}^{\,2} \pm \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{u^2}\right)$$

$$= a^2\left(d\vec{x}^{\,2} \pm \frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1 \mp \vec{x}^{\,2}}\right)$$

$$= a^2\left(d\vec{x}^{\,2} + K\,\frac{(\vec{x}\cdot d\vec{x})^2}{1-K\vec{x}^{\,2}}\right)$$

$$K = \begin{cases} 0 & \text{plano} \\ 1 & \text{Curv. positiva} \longrightarrow \text{esférico} \\ -1 & \text{Curv. Negativa} \longrightarrow \text{hiperbólico} \end{cases}$$

$$= a^2\,\tilde{g}_{ij}\,dx^i dx^j$$

Coordenadas esféricas

$$d\vec{x}^{\,2} = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

$$\vec{x}\cdot d\vec{x} = r\,dr$$

$$dl^2 = a^2\left(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi + K\,\frac{r^2 dr^2}{1-Kr^2}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\, d\Omega_2^2\right)$$

outro sistema de coordenadas χ

$$d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} \longrightarrow dl^2 = a^2\left(d\chi^2 + S_K^2(\chi)\, d\Omega_2^2\right)$$

$$\begin{cases} \sinh\chi & \chi = -1 \\ \chi & \chi = 0 \\ \sin\chi & \chi = 1 \end{cases}$$

Métrica FRW (Friedmann-Robertson-Walker)

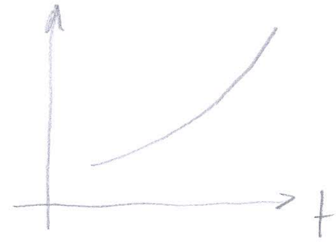
$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,\tilde{g}_{ij}\,dx^i dx^j$$

não tem um termo $\tilde{g}_{0i}$

$\boxed{a(t)}$ $\boxed{k}$

$\rightarrow$ Fator de escala

$a(t) \rightarrow$ expansão



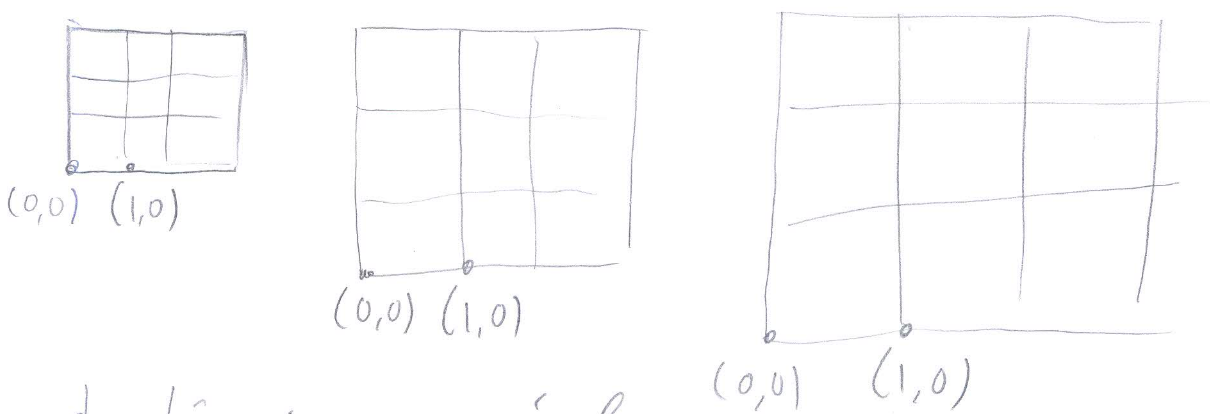
Coordenadas Comóveis

$$\begin{cases} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \\ u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds} = (1, 0, 0, 0) \end{cases}$$

t = relógio comóvel

coordenadas físicas

$$x^i_{\text{físicas}} = a(t)\, x^i$$



distância comóvel
= fixa

distância físicas
= cresce

Métrica do Universo ($c=1$)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\Omega_2^2\right]$$

Liberdade de "rescaling" (a métrica não muda)

$$\begin{cases} a \to \lambda a \\ r \to \dfrac{r}{\lambda} \\ K \to \lambda^2 K \end{cases}$$

$\to$ usar para colocar $a(\text{hoje}) = a_0 \equiv a(t_0) = 1$

$$= dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + S_K^2(\chi)\, d\Omega_2^2\right]$$

tempo conforme

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)}$$

$$ds^2 = a^2(\tau)\underbrace{\left[d\tau^2 - d\chi^2 - S_K^2(\chi)\, d\Omega_2^2\right]}_{\text{Minkowski estática}}$$

fator conforme

Raios de luz $ds^2 = 0$ $\to$ propagação como em Minkowski usando τ.

Geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

Fixar λ: $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = p^\mu$ = momento da partícula ou luz (= fóton)

$$\rightarrow \quad \frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta$$

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dp^\mu}{dx^\alpha} = p^\alpha \frac{dp^\mu}{dx^\alpha}$$

$$\Rightarrow p^\alpha \frac{dp^\mu}{dx^\alpha} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta$$

Símbolos de Christoffel

$$\begin{cases} \Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\,\tilde{g}_{ij} \\ \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij} \\ \Gamma^i_{jk} = \underbrace{\tilde{\Gamma}^i_{jk}}_{\text{calculando com } \tilde{g}_{ij}} \end{cases}$$

Homogeneidade

$$\partial_i p^\mu = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{p^0 \frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = -2\Gamma^\mu_{\alpha j}\, p^\alpha p^j}$$

Se $p^i = 0$ (partícula em repouso nas coord. comóveis)

$\hookrightarrow \frac{dp^i}{dt} = 0$ Um observador em queda livre fica em queda livre nessas coordenadas.

$\mu = 0 \quad p^0 \dfrac{dp^0}{dt} = -\Gamma^0_{ij} p^i p^j = -\dfrac{\dot{a}}{a} \vec{p}^{\,2}$

$\hookrightarrow \vec{p}^{\,2} = a^2 \tilde{g}_{ij} p^i p^j$

$$(p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$$

$$\Rightarrow p^0 dp^0 = p\,dp \longrightarrow p\dot{p} = -\frac{\dot{a}}{a}\vec{p}^{\,2} \longrightarrow \frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\dot{a}}{a}$$

$$\boxed{p \propto \frac{1}{a}}$$

Partícula sem massa:

$p = E \propto \dfrac{1}{a}$ energia decai

Partícula com massa:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \propto \frac{1}{a}$$

$\hookrightarrow v^2 = a^2 \tilde{g}_{ij} v^i v^j$

Redshift: Expansão do universo estica o comprimento de "onda".

$$\lambda = \frac{h}{p} \sim a(t) \qquad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} > 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_0 > \lambda_1}$$

$t_0 \to$ detecção, $t_1 \to$ emissão

Parâmetro de Redshift

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \qquad 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{1}{a(t_1)}$$

$$\boxed{1 + z = \frac{1}{a(t_1)}}$$

Lei de Hubble

expansão de $a(t)$ para fontes de luz perto.

$$a(t_1) = a(t_0)\left[1 + (t_1 - t_0) H_0 + \cdots\right]$$

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \text{constante de Hubble}$$

$t_0 = t_{hoje}$

$$Z = H_0 \underbrace{(t_0 - t_1)}_{c=1} \simeq H_0 . d$$

distância física (perto)

H_0 = taxa da expansão

convenção $H_0 = 100\, h \frac{Km}{s\, Mpc}$ → $pc = 3.26\, ly$

h → $0,71 \pm 0,03$

[Válido para objetos perto]

Distância métrica $\boxed{dm}$:
(não é observável)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[d\chi^2 + S_K^2(\chi)\, d\Omega_2^2\right]$$

$K=0$ plano $\quad dm = \chi$
$(S_K(\chi) = \chi)$

$$\chi(Z) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^Z \frac{dz'}{H(z')}$$ → Distância até uma galáxia com redshift $= Z$

2) Distância de luminosidade

Supernovae de tipo IA
= "Velas padrão"

É igual para todas Supernovas IA

Conhecemos a luminosidade absoluta emitida L
↳ = energia emitida por segundo.

fluxo observado

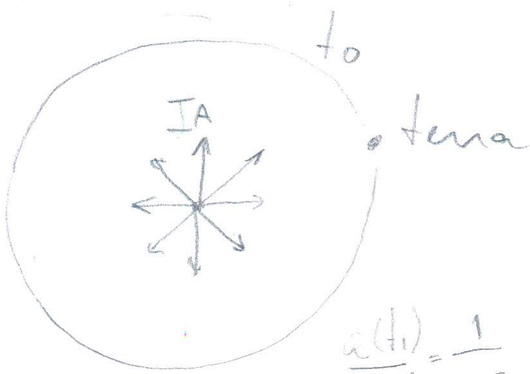
$$F = \frac{\text{energia recebida}}{\text{Segundo . Area}}$$

Fonte a distância comóvel fixada x

Espaço euclideano estático

$$F = \frac{L}{4\pi x^2}$$

Espaço FRW isso vai ser modificado



$$\frac{a(t_1)}{a(t_0)} = \frac{1}{1+z}$$

*) Área da esfera em t_0
$\boxed{4\pi d_m^2}$

*) Comprimento de onda foi reduzido pelo redshift

→ Energia hf_0 do foton observado é

$$hf_0 = \frac{1}{1+z} \underbrace{hf_1}_{\text{energia do fóton emitido}}$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

$$\boxed{d_L = d_m (1+z)}$$ distância observável

3) Distância de diâmetro angular objetos com tamanho D padrão

Dinâmica

$a(t) = ?$ $\longrightarrow$ precisamos das equações de Einstein

Tensor energia-momento de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ P = P(t) \end{cases}$$

$$D_\mu T^\mu{}_\nu = 0 = \partial_\mu T^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\nu + - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu{}_\lambda$$

$$\boxed{\nu = 0} \xrightarrow{HW} \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0}$$

Equação de Continuidade

$\boxed{\text{Matéria}}$ $|P| << \rho$: Densidade de energia é dominada pela massa

$P = 0$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}\rho = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\rho_{mat} \propto a^{-3}}$$

Matéria Bariônica → Matéria usual

$\oplus$

Matéria Escura

Radiação

$P = \frac{1}{3}\rho$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}\frac{4}{3}\rho = 0$$

$$\boxed{\rho_{rad} \propto a^{-4}}$$

fótons, neutrinos, gravitons

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{\text{Volume}} \times \left(\text{redshift} \sim \frac{1}{a}\right)$$

Universo primordial CMB = Cosmic Microwave Background.

Energia Escura

$P = -\rho$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \longrightarrow \rho_{EE} \propto a^0$$