16 de agosto de 2010

Exercícios–1

1. Defina coordenadas esféricas pelas transformações

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

   Defina os versores $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano nestas coordenadas.

2. Defina coordenadas cilíndricas pelas transformações

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
$$

   Defina os versores $\hat{r}$, $\hat{\varphi}$ e $\hat{z}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano nestas coordenadas.

3. Defina coordenadas elípticas oblatas pelas transformações

$$
\begin{aligned}
x &= a\cosh\psi\sin\theta\cos\varphi \\
y &= a\cosh\psi\sin\theta\sin\varphi \\
z &= a\sinh\psi\cos\theta
\end{aligned}
$$

   Defina os versores $\hat{\psi}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano nestas coordenadas.

4. Defina coordenadas elípticas prolatas pelas transformações

$$
\begin{aligned}
x &= a\sinh\psi\sin\theta\cos\varphi \\
y &= a\sinh\psi\sin\theta\sin\varphi \\
z &= a\cosh\psi\cos\theta
\end{aligned}
$$

Defina os versores $\hat{\psi}$, $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano nestas coordenadas.

5. Defina coordenadas parabólicas pelas transformações

$$\begin{aligned} x &= uv\cos\theta \\ y &= uv\sin\theta \\ z &= \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right) \end{aligned}$$

Defina os versores $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{\theta}$ como aqueles que apontam nas direções de crescimento das respectivas variáveis. Calcule o gradiente, o divergente, o rotacional e o Laplaciano nestas coordenadas.

6. Mostre que $\nabla \wedge \nabla \wedge \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$.

7. Mostre que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

8. Calcule o potencial eletrostático em todo o espaço gerado por uma esfera de raio R com carga Q uniformemente distribuída. Efetuar o cálculo através do teorema de Gauss, assim como por integração direta.

9. Calcule o potencial eletrostático em todo o espaço gerado por um fio finito de comprimento L. Ache então o potencial para $L \to \infty$. Compare com o resultado obtido através da lei de Gauss.

10. Numa região do espaço onde o campo elétrico é constante e de valor $\vec{E}_0$ coloca-se uma esfera condutora de raio R. Calcular o potencial em todo o espaço.

11. Em um condutor é feito um buraco de raio R, e coloca-se um dipolo de momento p conhecido, no centro do buraco. Calcule o potencial eletrostático no interior do buraco.

12. Uma carga é colocada em frente a um diedro condutor infinito com 90^0 de abertura, a uma posição (x_0, y_0) dos planos. Calcule o potencial através do método das imagens.

13. Um fio infinito de densidade de cargas por unidade de comprimento λ é colocado paralelamente a uma distância d de um plano condutor

infinito. Calcule o potencial em todo o espaço, assim como a expressão para o campo elétrico.

14. Numa região do espaço onde o campo elétrico é constante e de valor $\vec{E}_0$ coloca-se um cilindro condutor de raio ρ_0 perpendicularmente ao campo $\vec{E}_0$. Calcular o potencial eletrostático em todo o espaço, assim como o campo elétrico.

15. Uma carga q é colocada no meio de duas esferas condutoras idênticas de raio R a uma distância $D > 2R$ uma da outra. Esquematize a solução do potencial eletrostático em todo o espaço.

16. Uma agulha é tida como atrator de raios. Um exemplo de agulha gigantesca é o pára-raios. Supondo que a solução do problema eletrostático seja relacionada a um cone condutor de abertura angular α, tente uma solução simples do problema eletrostático e interprete em termos de um pára-raios.

17. Considere um diedro infinito de ângulo θ carregado. Ache a solução da equação de Laplace. Calcule a distribuição aproximada de cargas.

18. Em um buraco de raio R feito em um condutor coloca-se um quadrupolo formado por três cargas de valores q em $z = a$, $2q$ em $z = 0$ e $-q$ em $z = -a$. Seja $Q = qa^2$ o momento de quadrupolo. Ache a solução completa do problema em termos de Q.

19. Repita o problema para quatro cargas, q em $x = a$, q em $x = -a$, $-q$ em $y = -a$ e $-q$ em $y = a$. Novamente, $Q = qa^2$ é o momento de quadrupolo. Ache a solução completa do problema em termos de Q.