Eletromagnetismo I

Manual de Soluções - Nona Lista

Miguel J Bernabé Ferreira

Exercício 1

A força magnética, devida a um campo magnético externo, que atua sobre uma carga elétrica q, quando esta se movimenta com uma velocidade v, é dada por

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Queremos calcular a força eletromotriz entre o centro e a extremidade do disco, para isso usamos a seguinte relação

$$V = \frac{1}{q} \int \mathbf{F}.d\mathbf{l}$$

Nesse caso a força magnética é radial, assim podemos fazer

$$V = \frac{1}{q} \int F(r)\ dr$$

sendo $F(r) = qvB = q\omega Br$ logo

$$V = \frac{1}{q} \int_0^a (q\omega B\ r)\ dr = \frac{\omega B a^2}{2}$$

e pela lei de Ohm obtemos

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

Exercício 2

O campo elétrico entre as placas de um capacitor é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\ \hat{k}$$

na aproximação quase estática podemos escrever

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\ \hat{k} = \frac{Q(t)}{\pi a^2 \epsilon_0}\ \hat{k}$$

se a corrente elétrica é dada por

$$I(t) = J_0 \cos(\omega t)$$

então a carga elétrica que se acumula nas placas do capacitor é

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t)$$

logo

$$\mathbf{E}(t) = \frac{Q_0}{\pi a^2 \epsilon_0} \sin(\omega t)\ \hat{k}$$

agora podemos usar a lei de Ampere-Maxwell para calcular o campo magnético

$$\oint \mathbf{B}.d\mathbf{l} = \mu_0 \underbrace{\mathbf{J}}_{0} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E$$

escolhemos a a curva l como sendo um círculo de raio ρ entre as placas do capacitor e paralela às placas, assim obtemos

$$B(2\pi\rho) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q_0}{\pi a^2 \epsilon_0} \sin(\omega t) \pi \rho^2 \right)$$

dai

$$\mathbf{B} = \frac{\omega \mu_0 Q_0\ \rho}{2\pi a^2} \cos(\omega t) \hat{e}_\phi$$

Exercício 3

Dado que o solenóide é longo, podemos aproximar o campo magnético dentro do mesmo por

$$\mathbf{B}_s(t) = n\ \mu_0 I(t)\ \hat{k}$$

assim o campo elétrico deve ser da forma

$$\mathbf{E} = E(\rho) \hat{e}_\phi$$

o qual pode ser calculado por

$$\oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_M$$

escolhemos o contorno l como sendo um círculo de raio ρ concêntrico ao eixo do solenóide, assim ficamo com (para $\rho < a$)

$$E(\rho)\,(2\pi\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(B\pi\rho^2\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(n\mu_0 I(t)\pi\rho^2\right) = -n\mu_0\pi\rho^2\frac{\partial I}{\partial t}$$

portanto

$$\mathbf{E}(\rho) = \left(\frac{n\mu_0}{2}\frac{\partial I}{\partial t}\,\rho\right)\hat{e}_\phi$$

Para a região $\rho > a$ o fluxo magnético é

$$\Phi = \pi a^2 n\mu_0 I$$

logo obtemos

$$\mathbf{E}(\rho) = \left(-\frac{n\mu_0 a^2}{2\rho}\frac{\partial I}{\partial t}\right)\hat{e}_\phi$$

Exercício 4

Sabe-se a força eletromotriz está relacionado com a indutância L por

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

assim a potência elétrica fica

$$\frac{dW}{dt} = -\varepsilon I = LI\frac{dI}{dt}$$

logo resolvemos a EDO e obtemos

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(LI)}_{\Phi_M}I$$

e portanto

$$W = \frac{1}{2}I\Phi_M = \frac{1}{2}I\oint \mathbf{A}.d\mathbf{l} = \frac{1}{2}\oint(\mathbf{A}.\mathbf{I})\,dl$$

analogamente em três dimensões obtemos

$$W = \frac{1}{2}\int(\mathbf{A}.\mathbf{J})\,d^3\mathbf{x}$$

Mas sabemos que

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{x}$$

logo podemos escrever

$$W = \frac{1}{8\pi}\int d^3\mathbf{x}\int d^3\mathbf{x}'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}).\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}$$

Exercício 5

A força elétrica, por unidade de área, sobre as placas do capacitor é dada por

$$\mathbf{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat{k}$$

mas vamos calcular tal força por meio do tensor de stress de Maxwell. O campo elétrico é constante, o que significa que não há campo magnético neste problema.

$$\mathbf{E} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{k}$$

o tensor de stress de Maxwell é dado por

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\underbrace{\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)}_{0} \\ &= \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) \end{aligned}$$

Visto que o campo elétrico só possui a componente E_3, as componentes do tensor de stress de Maxwell ficam

$$T_{11} = T_{22} = -T_{33} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}, \quad T_{12} = T_{21} = T_{13} = T_{31} = T_{23} = T_{32} = 0$$

ou ainda

$$T = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O tensor de stress é uniforme, então a força pode ser calculada por

$$\mathbf{f}_j = \sum_i T_{ij}a_i$$

sendo $a = (0,0,1)$ (direção $\hat{k}$).

$$\mathbf{f}_j = T_{1j}a_1 + T_{2j}a_2 + T_{3j}a_3 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\delta_j^3$$

isto significa que só existe força na direção $\hat{k}$.