Física matemática I — FMA204
Segunda Lista
Data máxima para entrega 23/03/01

Exercícios para entrega:

1. Uma corda sujeito sujeita a uma força dissipativa proporcianal a $\frac{\partial u}{\partial t}$ e a forças externas obedece a equação de movimento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = F(\mathbf{x}, t) \quad ,$$

com v e $\gamma > 0$ constantes, sendo F uma função dada. Seja S uma superfície fechada e V o volume contido por esta. A condição inicial é dada por

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = v_0(\mathbf{x}) \quad ,$$

enquanto que a condição de contorno é

$$u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } S.$$

Mostre que a unicidade da solução desta equação diferencial dadas as condições acima. Roteiro:

   (a) Assuma que existem duas soluções u_1 e u_2 e obtenha a equação que satisfaz $U = u_1 - u_2$ bem como a sua condição inicial e de contorno.

   (b) Defina a quantidade

$$E(t) = \int d^3\mathbf{x} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left| \nabla U \right|^2 \right]$$

   e mostre que $E(t) \geq 0$ e $E(0) = 0$.

   (c) Mostre que $dE/dt \leq 0$. Conclua então que U deve ser identicamente nula.

2. Refaça o problema anterior mas utilize a condição de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } S.$$

3. Considere uma equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

com $x \in [0, L]$. Sabemos que a solução geral deste problema é

$$u(x,t) = F(x - vt) + G(x + vt) \quad .$$

   (a) Mostre que a condição de contorno $u(0,t) = 0$ implica que $G(y) = -F(-y)$ qualquer que seja y real.

   (b) Mostre que a condição de contorno $u(L,t) = 0$ implica que $F(y) = F(y + 2L)$.

Exercícios suplementares:

4. Em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) temos

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \quad , \\ y &= \rho \sin\phi \\ z &= z \quad . \end{aligned}$$

Obtenha neste sistema de coordenadas seus vetores normalizads de base, gradiente, divergente, rotacional e laplaciano.

5. Obtenha a solução da equação de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \quad ,$$

impondo as condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

e a condição inicial $u(x,0) = 0$ para $x \in [0, L]$.

Leitura e referências:

1. Coordendas curvilíneas: Butkov, *Física Matemática*, parágrafo 1-9; **ou** G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, parágrafos 2-1 a 2-4.

2. Corda vibrante e ondas sonoras: Symon, *Mechanics*, parágrafos 8-1, 8-7 e 8-10.

3. Equação de calor: Djairo Figueiredo, *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*, parágrafo 1-1.

4. Classificação e solução geral das equações parciais de segunda ordem: Stephenson, *Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais*, 2-1 e 2-2.*

5. Algumas provas de unicidade: Kreider, Kullerm Ostberg e Perkins, *Introdução à Análise Linear*, apêndice IV-4.*

Aviso: O monitor do curso é o Vicente Barros, cuja sala é no Edifício Basílio Jafet 124b. Seu horário de atendimento é quintas das 18 as 19. E-mail: vpbarros@fap01.if.usp.br