Física matemática I — FMA204
Terceira Lista
Data máxima para entrega 06/04/01

Exercícios para entrega:

1. Uma corda sujeito sujeita a uma força dissipativa proporcianal a $\frac{\partial u}{\partial t}$ e a forças externas obedece a equação de movimento
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 u + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \ ,$$
com v e $\gamma > 0$ constantes. Mostre que esta equação é separável em coordenadas cartesianas. Resolva o problema em três dimensões espaciais.

2. Considere uma equação de onda em três dimensões espaciais.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 u = 0 \ .$$
Soluções esfericamente simétricas são escritas na forma $u(\mathbf{x}, t) = u(r, t)$ em coordenadas esféricas.
   (a) Qual e equação que $u(r, t)$ obedece?
   (b) Definindo $v(r, t) = r u(r, t)$ e as coordenadas $\xi = r + vt$ e $\eta = r - vt$ mostre que
$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \ .$$
   (c) A partir do último item, obtenha a solução geral para $u(r, t)$

3. Obtenha a série de Fourier de uma função de período $2L$ e que satisfaz
$$f(x) = x^2 \text{ para } -L \leq x \leq L \ .$$
Faça o gráfico desta funções e da soma dos dois primeiros termos não nulos de sua série de Fourier. Para que valor a série deveria convergir no ponto L? Verifique sua resposta. Utilizando o teorema de Fourier e calculando a série no ponto $x = 0$ mostre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

4. Obtenha a série de Fourier de uma função de período 2π e que satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{para } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{para } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Faça o gráfico desta funções e da soma dos dois primeiros termos não nulos de sua série de Fourier.

Exercícios suplementares:

5. Refaça o primeiro problema mas usando as coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z)

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \ , \\ y &= \rho \sin\phi \\ z &= z \ . \end{aligned}$$

6. Obtenha a série de Fourier de uma função de período $2L$ e que satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} L + x & \text{para } -L \le x \le 0 \\ L - x & \text{para } 0 \le x \le L \end{cases}$$

Faça o gráfico desta funções e da soma dos dois primeiros termos não nulos de sua série de Fourier.

7. Obtenha a série de Fourier de uma função de período $2L$ e que satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } -L \le x \le 0 \\ x^2 & \text{para } 0 \le x \le L \end{cases}$$

Faça o gráfico desta funções e da soma dos dois primeiros termos não nulos de sua série de Fourier. Para que valor a série deveria convergir no ponto L? Verifique sua resposta.

8. Obtenha a série de Fourier de uma função de período 1 e que satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

Faça o gráfico desta funções e da soma dos dois primeiros termos não nulos de sua série de Fourier. Para que valor a série deveria convergir no ponto $\frac{1}{2}$? Verifique sua resposta.

Leitura e referências:

1. Equação de calor: Djairo Figueiredo, *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*, capítulo 2.