Física matemática I — FMA204
Quarta Lista

Exercícios suplementares:

1. Supondo conhecidos os coeficientes de Fourier das funções f e g, obtenha os coeficientes de $\alpha f + \beta g$, onde α e β são constantes.

2. Use a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} \cos \alpha x & \text{para} \quad -\pi < x \leq \pi \\ \text{periódica de período } \ 2\pi & \end{cases}$$

onde α é um número real não nulo para mostrar que

$$\text{cotg}\alpha\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}\right) \quad ,$$

quando α não é inteiro.

3. Se f e g são periódicas de período $2L$ e seccionalmente contínuas, mostre que

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x) g(x) = \frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) \quad ,$$

onde a_n e b_n (α_n e β_n) são os coeficientes de Fourier de f (g). Interprete geometicamente este resultado.

4. Para que valores reais de α a equação diferencial

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = \alpha Y$$

admite que soluções que satisfazem às condições de contorno

$$Y(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{dY}{dy}(L) = 0 \ \ ?$$

Qual seria a resposta se as condições de contorno fossem

$$Y(0) = Y(L) = 0 \ \ ?$$

5. Mostre a unicidade da solução da equação tridimensional não homogênea

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \ ,$$

onde ρ é uma função dada e ϵ_0 é uma constante, quando utilizamos a condição de contorno

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \ \text{ para } \ \mathbf{x} \in \mathcal{S}$$

onde f é uma função dada e $\mathcal{S}$ é uma superfície fechada.

6. Mostre que a equação de Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

é separável em coordenadas esféricas.

7. Obtenha a solução $x(t)$ de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \sin(\omega t)$$

sujeita a condição inicial $x(0) = 1$ e $\frac{dx}{dt}(0) = 0$.

Leitura e referências:

1. Séries de Fourier: Djairo Figueiredo capítulo 2.

2. Convergência das séries de Fourier: KKOP seções 10.1 a 10.6.