Física matemática I — FMA204
Sexta Lista
Data máxima para entrega 30/05/01

Exercícios para entrega:

1. Resolva formalmente o seguinte problema usando separação de variáveis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u \quad && \text{em} \quad t > 0 \ , \quad 0 < x < L \ , \\ u(0,t) &= u(L,t) = 0 && \text{para} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) && \text{para} \quad 0 < x < L \ , \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) && \text{para} \quad 0 < x < L \ . \end{aligned}$$

   Obtenha a energia do sistema e sua expressão em termos dos modos de vibração.

2. Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{em} \quad t > 0 \ , \quad 0 < x < L \ , \\ u(0,t) &= 0 \ , \quad u(L,t) = e^{-t} && \text{para} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 && \text{para} \quad 0 < x < L \ . \end{aligned}$$

3. Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin(2\pi t) && \text{em} \quad t > 0 \ , \quad 0 < x < 1 \ , \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \text{para} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 && \text{para} \quad 0 < x < 1 \ . \end{aligned}$$

4. Considere uma corda infinita. Obtenha a solução do seguinte problema Calcule a solução de equilíbrio do seguinte problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{em} \quad t > 0 \ , \quad -\infty < x < \infty \ , \\ u(x,0) &= x e^{-x^2} \ , \quad \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cos(2x) && \text{para} -\infty < x < \infty \ . \end{aligned}$$

5. Considere uma corda tracionada horizontal de compromento π com as extremidades fixas. Esta corda está sujeita a forçada gravidade e a resistência do ar dada por $-2\gamma\partial u/\partial t$, ode $\gamma > 0$ é constante. Expresse matematicamente este problema e encontre o movimento da corda. (Dica problema 6.10 do Djairo)

   Complementares:

6. A corda tensa de um instrumento musical tem 50 cm de comprimento e sua frequência fundamental (i.e. primeiro harmônico) é 4000 Hz. Determine a frequência do segundo harmônico. Determine a frequência fundamental se por pressão do dedo a corda for reduzida a 25 cm. Determine a frequência fundamental se a tensão for aumentada 25%.

7. Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u && \text{em} \quad t > 0 \ , \quad 0 < x < L \ , \\
u(0,t) &= u(L,t) = 0 && \text{para} \quad t > 0 \\
u(x,0) &= \sin(2\pi x) && \text{para} \quad 0 < x < L/2 \ , \\
u(x,0) &= 0 && \text{para} \quad L/2 < x < L \ , \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 && \text{para} \quad 0 < x < L \ .
\end{aligned}$$

   Obtenha a energia do sistema e sua expressão em termos dos modos de vibração.

8. Resolva o seguinte problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0 \ , \quad 0 < x < L \ , \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= u(L,t) = 0 && \text{para} \quad t > 0 \\
u(x,0) &= 0 && \text{para} \quad 0 < x < L \ , \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= x && \text{para} \quad 0 < x < L \ .
\end{aligned}$$

   Obtenha a energia do sistema e sua expressão em termos dos modos de vibração.

9. Resolva o seguinte problema bidimensional

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \ , \\ u(x,0) &= x(a-x) \quad \text{para} \quad 0 < x < a \ , \\ u(x,b) &= 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < a \ , \\ u(0,y) &= 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < b \ , \\ u(a,y) &= 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < b \ . \end{aligned}$$

Leitura e referências:

1. Equação de calor: Djairo Figueiredo, *Análise de fourier e equações diferenciais parciais*, 5.1 a 5.8 e 5.11.