Física matemática I — FMA204
Nona Lista

Exercícios suplementares:

1. Mostre que

   (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ e^{-x^4} = \Gamma(3/4)$

   (b) $\Gamma(z) = \int_0^1 dt\ \left[\ln(1/t)\right]^{z-1}$

   (c) $-\int_0^1 dx\ x^k \ln(x) = 1/(k+1)^2$

2. Usando a função geradora dos polinômios de Legendre mostre que $P_n(1) = 1$ para todos os n e que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

3. Prove que a equação de Helmoltz
$$\nabla^2 u + k^2 u = 0\ \ ,$$
é separável em coordenadas esféricas. Assumindo que a solução é invariante por rotações ao longo do eixo z, quais são as soluções da equação diferencial resultante para a função de θ.

4. Derivando a função geratriz dos polinômios de Legendre com respeito a x mostre que
$$\frac{dP_{n+1}}{dx}(x) + \frac{dP_{n-1}}{dx}(x) = 2x\frac{dP_n}{dx}(x) + P_n(x)\ \ .$$

5. Uma esféra condutora de raio a é colocada em um campo elétrico tal que este campo longe da esfera é dado por $\mathbf{E} = E_0\mathbf{k}$. Utilizando separação de variáveis, obtenha o potencial para todos os pontos fora da esfera. Lembre-se que o potencial deve satisfazer a equação de Laplace nesta região e que o potencial é constante na superfície da esfera (assuma que é zero na esfera para facilitar).

6. Derive a relação de recorrência
$$(1 - x^2)\frac{dP_n}{dx} = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)\ \ .$$

7. Obtenha uma expressão integral para $\delta(x-a)$ usando a transformada de Fourier.

8. Encontre a transformada de Fourier das seguintes funções:

   (a) $e^{-\lambda x^2}\cos(\beta x)$;

   (b) $\sqrt{2/\pi}\,\sin(ax)/x$.

Leitura e referências:

1. Funções gama: Arfken 10.1.

2. Polinômios de Legendre e harmônicos esféricos: Arfken 12.1 a 12.6.