Física matemática I — FMA204
Primeira prova — 18/abril/2001

1. Encontre a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 x = e^x$$

satisfazendo $y(0) = 1$ e $\frac{dy}{dx}(0) = 0$. (Valor 2,0)

2. Mostre que a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

com k^2 constante é separável em coordenadas cilíndricas. O Laplaciano nestas coordenadas é dado por

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad .$$

(Valor 2,0)

3. Obtenha a série de Fourier de uma função de período 1 e que satisfaz

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Para que valor a série converge no ponto $\frac{1}{2}$? (Valor 2,5)

4. Use a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} \cos\alpha x & \text{para } \ -\pi < x \leq \pi \\ \text{periódica de período } \ 2\pi & \end{cases}$$

onde α é um número real não nulo para mostrar que

$$\text{cotg}\alpha\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\right) \quad ,$$

quando α não é inteiro. (Valor 2,5)

5. Mostre a unicidade da solução da equação tridimensional não homogênea

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad ,$$

onde ρ é uma função dada e ϵ_0 é uma constante, quando utilizamos a condição de contorno

$$\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \;\text{ para }\; \mathbf{x} \in \mathcal{S}$$

onde f é uma função dada e $\mathcal{S}$ é uma superfície fechada. Dica suponha que existem duas soluções u_1 e u_2 e defina $U = u_1 - u_2$. Obtenha a equação diferencial que U obedece e sua condição de contorno, então utilize a quantidade

$$I = \int_{\mathcal{S}} dS\mathbf{n} \cdot U\nabla U \quad .$$

(Valor 2,0)

Relações que talvez possam ajudar

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad ; \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx|f(x)|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\int_{\mathcal{S}} dS\mathbf{n}\cdot\mathbf{V} = \int_V d^3\mathbf{x}\nabla\cdot\mathbf{V} \quad ; \quad \nabla(g\mathbf{V}) = \nabla g\cdot\mathbf{V} + g\nabla\cdot\mathbf{V}$$