Física matemática I — FMA204
Primeira prova — 18/abril/2001
Gabarito

1. Uma solução particular da equação não homogênea é

$$y_p(x) = \frac{1}{1+w^2}\; e^x \quad .$$

Somando-se a solução geral da equação homogênea temos

$$y_{geral}(x) = y_p(x) + C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x) \quad ,$$

onde C_1 e C_2 são constantes que são determinadas impondo as condições iniciais dadas.

$$C_1 = -\frac{1}{\omega(1+\omega^2)} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \frac{\omega^2}{1+\omega^2} \quad .$$

2. Substituindo $u = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ na equação de Helmoltz e dividindo por u vem que

$$\frac{1}{R\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad ,$$

donde segue que

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha = \text{ constante.}$$

Usando este fato e multiplicando por ρ^2 temos

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + (\alpha + k^2)\rho^2 = 0 \quad ,$$

levando a

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \beta = \text{contante}$$

e

$$\frac{\rho}{R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) + \beta + (\alpha + k^2)\rho^2 = 0 \quad .$$

3. Usando as fórmulas com $L = 1/2$ vem que

$$f(x) = \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{2n^2\pi^2} \cos(2n\pi x) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n\pi} \sin(2n\pi x) \right] \ .$$

   Usando o teorema de Fourier a séria converge para $1/4$ no ponto $x = 1/2$.

4. Neste caso $L = \pi$ e

$$f(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx) \right] \ .$$

   A identidade segue de avaliar a expressão acima para $x = \pi$.

5. Sejam u_1 e u_2 soluçòes do problema. Definimos $U = u_1 - u_2$ a qual satisfaz

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = 0 \ ,$$

   e a condição de contorno

$$U(\mathbf{x}) = 0 \ \text{ para } \ \mathbf{x} \in \mathcal{S} \ .$$

   Dessa condição de contorno segue que

$$I = \int_{\mathcal{S}} dS \mathbf{n} \cdot U \nabla U \equiv 0 \ .$$

   Usando o teorema de Gauss e a equação para U acima segue que

$$I = \int_V d^3\mathbf{x} |\nabla U|^2 = 0 \ .$$

   Portanto $\nabla U = 0$ e U é constante em V. Como ela vale 0 em S temos que $U = 0$, levando a $u_1 = u_2$.