Grupos e Tensores — FMT 429
2^o Semestre de 2000
Primeira lista — 22/09/00

Exercícios:

1. Considere um plano cujas coordenadas cartesianas são x e y. Por rotações estas coordenadas transformam-se em $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

   (a) Escreva a expressão de uma rotação por um ângulo θ.

   (b) Mostre que
   $$A^{ij} = \begin{pmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{pmatrix}$$
   é um tensor contra-variante

   (c) Mostre que
   $$B^{ij} = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$$
   não é um tensor contra-variante

2. Considere um espaço tridimensional cujas coordenadas cartesianas são x, y e z. Realizamos uma mudança para coordenadas esféricas
   $$\begin{aligned} x &= r\ \sin\theta\ \cos\phi\ , \\ y &= r\ \sin\theta\ \sin\phi\ , \\ z &= r\ \cos\theta\ . \end{aligned}$$

   (a) Obtenha as coordenadas covariantes do vetor $\mathbf{A}$ cujas componentes em coordenadas cartesianas são (V^x, V^y, V^z).

   (b) Obtenha as coordenadas contravariantes do vetor $\mathbf{A}$.

   (c) Qual a métrica em coordenadas esféricas?

   (d) Calcule os versores associados às coordenadas esféricas.

   (e) Quais são as componentes de $\mathbf{A}$ em termos dos versores do item anterior.

(f) Obtenha a expressão para o gradiente de uma função escalar em coordenadas esféricas usando tensores.

3. As componentes de dois tensores covariantes são iguais em um dado sistema de coordenadas. Qual a relação entre estes tensores num referencial arbitrário?

4. Mostre que o tensor delta de Kronecker δ^{μ}_{ν} possui a mesma expressão em todos os sistemas de coordenadas.

Leitura e referências:

1. O exemplo bidimensional pode ser encontrado no livro "Relativity e Cosmology" de H. Robertson e T. Noonan. Leia as seções 1.1 a 1.3.

2. Relembre as noções de espaço vetorial e seu dual do curso de álgebra linear.

3. As definições dos diversos tensores pode ser encontrada em muitos livros. Vide por exemplo, H. Lass "Vector and Tensor Analysis" (capítulo 8); J. Synge e A. Schild "Tensor Calculus" (capítulo 1); Landau "Teoria de Campo" (capítulo 1).