Capítulo 5

Mecânica Quântica e a Álgebra Linear

5.1 Espaços Vetoriais

Consideremos um conjunto V e um corpo K, que pode ser R (números reais) ou C (números complexos). V é chamado de um *espaço vetorial sobre* K se existirem duas operações

$$\begin{aligned} + \; : \; V \quad \times \quad & V \longrightarrow V \\ x \qquad\quad & y \longrightarrow x + y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \star \; : \; K \quad \times \quad & V \longrightarrow V \\ \alpha \qquad\quad & x \longrightarrow \alpha x \end{aligned}$$

as quais satisfazem as seguintes propriedades:

a. $x + y = y + x$
b. $x + (y + z) = (x + y) + z$
c. Existe um vetor nulo (0) tal que $x + 0 = x$
d. Para qualquer x em V, existe $(-x)$ tal que $x + (-x) = 0$
e. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
f. $1x = x$

g. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
h. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Exemplos (=Exercícios: mostre que)

1. Considere V como o conjunto das n-uplas $(x_1, ..., x_n)$ de números complexos. Definindo-se a soma de duas n-uplas e a sua multiplicação por um complexo através de

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) \equiv (x + y_1, ..., x + y_n) \tag{5.1}$$
$$\alpha(x_1, ..., x_n) \equiv (\alpha x_1, ..., \alpha x_n) \tag{5.2}$$

é fácil verificar que V é um espaço vetorial sobre os complexos. Este espaço vetorial é chamado de C^n.

2. Consideremos o conjunto V de todas as funções contínuas de quadrado integrável (*i.e.* $\int d^n x |\Psi(x)|^2 < \infty$). Definindo as operações através de

$$(\Psi_1 + \Psi_2)(x) \equiv \Psi_1(x) + \Psi_2(x) \quad \text{e} \quad (\alpha\Psi)(x) \equiv \alpha\Psi(x) \tag{5.3}$$

podemos verificar que V é um espaço vetorial sobre C.

O palco da ação em Mecânica Quântica é um espaço vetorial já que o princípio da superposição implica que os estados de um sistema formam um espaço vetorial.

5.2 Operadores lineares

Consideremos dois espaços vetoriais V e W sobre o corpo K. Uma função

$$\begin{aligned} T \; : \quad V &\longrightarrow W \\ x &\longrightarrow T(x) \end{aligned}$$

é dita linear se

a. $T(x+y) = T(x) + T(y)$,
b. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Quando V coincide com W chamanos esta função linear de *operador linear*.

Exemplos:

1. Mostre que se $V = W = C^n$ então o operador definido através de

$$T((x_1, ..., x_n)) = (y_1, ..., y_n) \tag{5.4}$$

com

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij} x_j \tag{5.5}$$

onde T_{ij} são números complexos, é linear.

2. Para o caso de V e W serem o espaço de funções do segundo exemplo da seção 4.1, temos que os operadores $\frac{d}{dx}$ e multiplicação por x são lineares.

5.3 Produto Escalar (ou Produto Interno)

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos. Um produto escalar (ou produto interno) é uma função

$$\begin{array}{cccc} \langle \quad | \quad \rangle : & V & \times V & \longrightarrow C \\ & x & y & \longrightarrow \langle x|y \rangle \end{array}$$

satisfazendo

a. $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle^*$.

b. Para x, y_1 e y_2 em V e dois números complexos arbitrários α e β tem-se

$$\langle x|\alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x|y_1 \rangle + \beta \langle x|y_2 \rangle \quad .$$

c. $\langle x|x \rangle \geq 0$, sendo a igualdade válida se e somente se $x = 0$.

Dizemos que dois vetores x e y são *ortogonais* se $\langle x|y\rangle = 0$.

Exemplos

1. Para $V = C^n$ podemos definir o produto escalar de x por y através de

$$\langle x|y\rangle = \langle (x_1, ..., x_n)|(y_1, ..., y_n)\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \quad . \tag{5.6}$$

Deixamos para o leitor mostrar que a definição acima satifaz todas as propriedades requeridas para um produtor escalar.

2. Para o espaço vetorial das funções contínuas de quadrado integrável é natural introduzirmos o produto escalar através de

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle \equiv \int d^n x \; \Psi_1^*(x)\Psi_2(x) \quad , \tag{5.7}$$

o qual é uma generalização natural do exemplo 1 acima para o caso do índice i tornar-se contínuo. Note que este este tipo de integral apareceu constantemente nos capítulos anteriores.

5.4 Operador Hermitiano Conjugado

Dado um operador linear A podemos associar a este um outro operador $A^\dagger$, chamado conjugado hermitiano (ou adjunto) de A, o qual satifaz a seguinte igualdade para quaisquer vetores x e y:

$$\langle x|Ay\rangle = \langle A^\dagger x|y\rangle \quad . \tag{5.8}$$

Se desejassemos ser mais cuidadosos deveríamos provar a existência de $A^\dagger$. Isto é facilmente feito para operadores A limitados e exige um cuidado maior na definição de $A^\dagger$ no caso de operadores não limitados.

Exemplos

1. Para $V = C^n$ e para A definido através de

$$A((x_1, ..., x_n)) = (y_1, ..., y_n) \quad \text{com} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \tag{5.9}$$

temos que o operador hermitiano conjugado de A é dado por

$$A^\dagger((x_1, ..., x_n)) = (y_1, ..., y_n) \quad \text{com} \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} {A^*_{ij}}^{\mathrm{T}} x_j \ , \tag{5.10}$$

onde ${A^*_{ij}}^{\mathrm{T}}$ é a matriz transposta e complexa conjugada de A_{ij}. Isto pode ser visto a partir de

$$\begin{aligned}
\langle x|Ay\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i^* \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i^* A_{ij} y_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[x_i A^*_{ij}\right]^* y_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} {A^*_{ji}}^{\mathrm{T}} x_i\right]^* y_j \\
&\equiv \langle A^\dagger x|y\rangle \ .
\end{aligned}$$

2. No espaço das funções de quadrado integrável temos que o adjunto de $\frac{d}{dx}$ é dado por $\frac{d}{dx}^\dagger = -\frac{d}{dx}$. De fato

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_1|\frac{d}{dx}\Psi_2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \Psi_1^*(x)\frac{d\Psi_2}{dx}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{\frac{d}{dx}\left[\Psi_1^*(x)\Psi_2(x)\right] - \frac{d\Psi_1^*}{dx}(x)\Psi_2(x)\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\frac{d\Psi_1}{dx}\right]^* (x)\Psi_2(x) \\
&= \langle -\frac{d}{dx}\Psi_1|\Psi_2\rangle \ ,
\end{aligned}$$

onde utilizamos que o primeiro termo da segunda igualdade anula-se uma vez que funções de quadrado integrável devem anular-se em $\pm\infty$.

Propriedades

i. $(A^\dagger)^\dagger = A$. (Mostre)
ii. $(\alpha A)^\dagger = \alpha^* A^\dagger$, onde α é um número complexo. De fato:

$$\langle x|\alpha A y\rangle = \alpha\langle x|Ay\rangle = \alpha\langle A^\dagger x|y\rangle = \langle \alpha^* A^\dagger x|y\rangle \ .$$

iii. $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$. De fato

$$\langle x|(A+B)y\rangle = \langle x|Ay\rangle + \langle x|By\rangle = \langle A^\dagger x|y\rangle + \langle B^\dagger x|y\rangle = \langle (A^\dagger + B^\dagger)x|y\rangle \ .$$

iv. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. De fato

$$\langle x|ABy\rangle = \langle A^\dagger x|By\rangle = \langle B^\dagger A^\dagger x|y\rangle \ .$$

Estas propriedades são muito úteis para a obtenção do hermitiano conjugado de operadores que são funções de p e x, os quais satisfazem $p^\dagger = p$ e $x^\dagger = x$.

5.5 Operadores Hermitianos

Um operador linear A é dito hermitiano (ou auto-adjunto) se $A = A^\dagger$. Para o espaço das funções contínuas quadraticamente integráveis isto significa que

$$\int d^n x \ \Psi_1^*(x) A \Psi_2(x) = \int d^n x \, (A\Psi_1)^* (x) \Psi_2(x) \ , \tag{5.11}$$

quaisquer Ψ_1 e Ψ_2. Neste espaço vetorial os seguintes operadores são hermitianos: multiplicação por $\mathbf{x}$, $\frac{1}{i}\nabla$ e ∇^2.

Propriedades

Os operadores hermitianos desempenham um papel central em Mecânica Quântica, por esse motivo é interessante estudá-los mais detalhadamente. Dentre as propriedades dos operadores hermitianos é conveniente ressaltar as seguintes:

a. Qualquer que seja o vetor x temos que $\langle x|Ax\rangle$ é real. De fato:

$$\langle x|Ax\rangle = \langle A^\dagger x|x\rangle = \langle Ax|x\rangle = \langle x|Ax\rangle^* \ .$$

b. Todos os autovalores de operadores hermitianos são reais. [1] Se $Av_{a_n} = a_n v_{a_n}$, onde a_n é o autovalor associado ao autovetor v_{a_n}, é fácil ver que a_n é real.

$$\langle v_{a_n}|Av_{a_n}\rangle = \langle v_{a_n}|a_n v_{a_n}\rangle = a_n\langle v_{a_n}|v_{a_n}\rangle$$

Uma vez que $\langle v_{a_n}|Av_{a_n}\rangle$ e $\langle v_{a_n}|v_{a_n}\rangle$ são reais, temos que a_n também o é pela igualdade acima.

c. Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.[1] Para ver isto calculemos $\langle v_{a_k}|Av_{a_n}\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle v_{a_k}|Av_{a_n}\rangle &= \langle v_{a_k}|a_n v_{a_n}\rangle = a_n\langle v_{a_k}|v_{a_n}\rangle \\ &= \langle Av_{a_k}|v_{a_n}\rangle = \langle a_k v_{a_k}|v_{a_n}\rangle = a_k\langle v_{a_k}|v_{a_n}\rangle\end{aligned}$$

Logo igualando os últimos termos das duas linhas acima vem que

$$(a_k - a_n)\langle v_{a_k}|v_{a_n}\rangle = 0 \quad ,$$

o que permite-nos concluir que se $a_k \neq a_n$ temos que $\langle v_{a_k}|v_{a_n}\rangle = 0$.

d. Consideremos o conjunto de todos os autovetores $\{v_{a_n}\}$ do operador hermitiano A. Assumiremos sem demonstração que este conjunto forma uma base do espaço vetorial em questão.[2] Sendo assim qualquer vetor no espaço vetorial pode ser escrito como uma superposição linear x dos autovetores de A.

$$x = \sum_n c_{a_n} v_{a_n} \quad , \tag{5.12}$$

onde os c_{a_n} são constantes complexas.

Para autovalores distintos sabemos que os autovetores correspondentes são ortogonais. Entretanto para os casos em que existe degenerescência, *i.e.* quando há vários autovetores associados ao mesmo autovalor, *a priori* não é garantido que autovetores diferentes sejam

[1] Lembre-se do resultado do cálculo do espectro e das autofunções do operador momento, partícula na caixa e oscilador harmônico.

[2] Isto pode ser provado em geral para espaços vetoriais de dimensão finita, todavia este não é um fato trivial para espaços de dimensão infinita. Em Mecânica Quântica assumimos que este teorema seja verdadeiro em todos os casos.

ortogonais entre si. Todavia neste caso podemos escolher estes autovetores de modo que eles sejam ortogonais entre si. Isto é possível já que uma combinação linear deste autovetores também é um autovetor:

$$Av_a^i = av_a^i \quad \text{para} \quad i = 1, .., m \tag{5.13}$$

então

$$A\left[\sum_{i=1}^{m} c^i v_a^i\right] = \sum_{i=1}^{m} c^i A v_a^i = \sum_{i=1}^{m} c^i a v_a^i = a \sum_{i=1}^{m} c^i v_a^i \quad . \tag{5.14}$$

Este fato possibilita-nos usar os processos de ortoganaligazação conhecidos, com a vantagens de que os novos vetores ainda são autovetores de A com autovalor a. Logo podemos escolher uma base de autovetores $\{v_a\}$ que seja ortogonal.

5.6 Normalização dos autovetores dos operadores hermitianos

Como acabamos de ver operadores hermitianos dão origem naturalmente a uma base ortogonal do espaço vetorial. É interessante agora normalizarmos esta base de modo que ela seja ortonormal, já que isto nos conduz a uma maior facilidade nos cálculos. A normalização que utilizaremos é a seguinte:

Para autovalores do discreto, *i.e.* para autovalores a_n que são isolados adotamos a seguinte normalização

$$\langle v_{a_n} | v_{a_n} \rangle = 1 \quad . \tag{5.15}$$

Para autovalores do contínuo, *i.e.* para autovalores a_ξ que possuem outros arbitrariamente próximos de si, adotamos que

$$\langle v_{a_\xi} | v_{a_{\xi'}} \rangle = \delta(a_\xi - a_{\xi'}) \quad . \tag{5.16}$$

Esta escolha, juntamente com a ortogonalidade de autovetores distintos, conduz-nos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle v_{a_n} | v_{a_k} \rangle &= \delta_{n,k} && (5.17)\\ \langle v_{a_\xi} | v_{a_{\xi'}} \rangle &= \delta(a_\xi - a_{\xi'}) && (5.18)\\ \langle v_{a_n} | v_{a_\xi} \rangle &= 0\,, && (5.19) \end{aligned}$$

onde na primeira linha temos um delta de Kronecker, enquanto na segunda aparece um delta de Dirac. A razão para esta escolha é simplicidade exibida nas relações abaixo.

5.6.1 Expansão em termos dos $\{v_a\}$

Adotando-se esta base, a expansão de um vetor arbitrário Ψ pode ser escrita como

$$\Psi = \sum_n c_{a_n} v_{a_n} + \int da_\xi c_{a_\xi} v_{a_\xi} \tag{5.20}$$

onde os coeficientes c_{a_n} e c_{a_ξ}são dados por

$$\begin{aligned} c_{a_n} &= \langle v_{a_n} | \Psi \rangle\,, && (5.21)\\ c_{a_\xi} &= \langle v_{a_\xi} | \Psi \rangle\,. && (5.22) \end{aligned}$$

Para verificarmos a validade das relações (5.20-5.22) vamos calcular $\langle v_{a_{\xi'}} | \Psi \rangle$. Deixamos para o leitor a verificação da relação (5.21).

$$\begin{aligned} \langle v_{a_{\xi'}} | \Psi \rangle &= \langle v_{a_{\xi'}} | \sum_n c_{a_n} v_{a_n} + \int da_\xi c_{a_\xi} v_{a_\xi} \rangle\\ &= \sum_n c_{a_n} \langle v_{a_{\xi'}} | v_{a_n} \rangle + \int da_\xi c_{a_\xi} \langle v_{a_{\xi'}} | v_{a_\xi} \rangle\\ &= \int da_\xi c_{a_\xi} \delta(a_\xi - a_{\xi'})\\ &= c_{a_{\xi'}}\,, \end{aligned}$$

onde para passar da segunda para a terceira linha utilizamos as relações (5.19-5.19). É importante ressaltar neste ponto que a normalização (5.18-5.19) permite-nos trabalhar com a base $\{v_a\}$ do mesmo modo que trabalhamos com os versores **i, j e k** no espaço R^3: para obtermos, por exemplo, a componente x de um vetor fazemos o produto escalar de **i** com o vetor. Note que é exatamente isto o que ocorre nas expressões (5.20-5.22)!

5.6.2 Cálculo de $\langle\Psi|\Psi\rangle$

A expansão (5.20) pode ser facilmente aplicada para o cálculo de $\langle\Psi|\Psi\rangle$, resultando uma expressão simples para esta quantidade.

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi|\Psi\rangle &= \langle\sum_k c_{a_k} v_{a_k} + \int da_{\xi'} c_{a_{\xi'}} v_{a_{\xi'}} | \sum_n c_{a_n} v_{a_n} + \int da_\xi c_{a_\xi} v_{a_\xi}\rangle \\
&= \sum_{n,k} c^*_{a_k} c_{a_n} \langle v_{a_k}|v_{a_n}\rangle + \int da_{\xi'} da_\xi c^*_{a_{\xi'}} c_{a_\xi} \langle v_{a_{\xi'}}|v_{a\xi}\rangle \\
&+ \sum_k \int da_\xi c^*_{a_k} c_{a_\xi} \langle v_{a_k}|v_{a_\xi}\rangle + \sum_n \int da_{\xi'} c^*_{a_{\xi'}} c_{a_n} \langle v_{a_{\xi'}}|v_{a_n}\rangle \\
&= \sum_{n,k} c^*_{a_k} c_{a_n} \delta_{n,k} + \int da_\xi da_{\xi'} c^*_{a_{\xi'}} c_{a_\xi} \delta(a_\xi - a_{\xi'})
\end{aligned}
$$

Logo temos que a expressão para $\langle\Psi|\Psi\rangle$ é análoga ao modulo ao quadrado de um vetor em três dimensões, *i.e.* ela é dada pela soma do módulo ao quadrado das componentes.

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \sum_n |c_{a_n}|^2 + \int da_\xi |c_{a_\xi}|^2 \tag{5.23}$$

5.6.3 Expressão para $\langle\Psi|A\Psi\rangle$

Para concluirmos esta seção vamos expressar $\langle\Psi|A\Psi\rangle$ em termos dos c_a. Uma vez que a manipulação é completamente análoga às precedentes vamos apenas dar o resultado, sugerindo ao leitor sua demonstração.

$$\langle\Psi|A\Psi\rangle = \sum_n a_n |c_{a_n}|^2 + \int da_\xi \; a_\xi |c_{a_\xi}|^2 \tag{5.24}$$

5.7 Operadores Unitários

Um operador U é dito unitário caso satisfaça

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad \text{(operador identidade)}$$

i.e.

$$U^\dagger = U^{-1} \ .$$

Propriedades dos operadores unitários

a. Qualquer que sejam os estados Ψ e ϕ temos que

$$\langle U\Psi | U\phi \rangle = \langle \Psi | U^\dagger U \phi \rangle = \langle \Psi | \phi \rangle \ .$$

b. Se $\{v_a\}$ é um conjunto de vetores ortonormais, então $\{Uv_a\}$ também o é. De fato

$$\langle Uv_a | Uv_b \rangle = \langle v_a | U^\dagger U v_b \rangle = \langle v_a | v_b \rangle = \delta_{a,b} \ .$$

5.8 Postulados da Mecânica Quântica

Vamos agora expressar os postulados da Mecânica Quântica utilizando a linguagem da Álgebra Linear.

5.8.1 Postulado I

O estado do sistema do sistema é completamente especificado por um elemento de um espaço vetorial, *i.e.* por um vetor.

No nosso enunciado utilizando a representação das coordenadas, os vetores eram dados pelas funções de onda de quadrado integrável $\Psi(\mathbf{x}, t)$. Neste caso, a quantidade $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ é a densidade de probabilidade de encontrarmos a partícula em um ponto $\mathbf{x}$. Alternativamente, poderíamos também descever este espaço vetorial utilizando a representação dos momentos, na qual os estados são dados pelas funções de onda $\Phi(p)$.

O fato do conjunto dos estados de um sistema formar um espaço vetorial é uma consequência do *princípio da superposição i.e.* do fato de que se Ψ_1 e Ψ_2 são estados, então $\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$, onde α e β são constantes complexas, também o é.
Observação: Existem sistemas na natureza que não possuem análogos clássicos. Nestes casos devemos escolher também qual é o espaço vetorial no qual os nossos modelos estão definidos.

5.8.2 Postulado II

As variáveis dinâmicas (A) são representadas por *operadores lineares e hermitianos* **(A_{op}), sendo que médias da variável dinâmica A são dadas por**

$$\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | A_{op} \Psi \rangle \ , \tag{5.25}$$

Na representação das coordenadas temos que

$$\langle A \rangle \equiv \int d^3\mathbf{x} \ \Psi^*(\mathbf{x}, t) \ A_{op} \ \Psi(\mathbf{x}, t) \ . \tag{5.26}$$

Caso a variável dinâmica A possua uma expressão clássica $A_{cl}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, podemos escrever (a menos de ambigüidades de ordenamento) que $A_{op} = A_{cl}(\mathbf{x}, \frac{\hbar}{i}\nabla_{\mathbf{x}})$. O fato de A_{op} ser hermitiano garante, como foi demonstrado, que as médias são números reais.

Para interpretarmos o significado dos autovalores a_n de um operador hermitiano A_{op}, bem como os coeficientes da expansão (5.20) devemos calcular a função característica da distribuição de probabilidades do observável A. Deixamos como um exercício para o leitor mostrar que

$$\langle e^{i\eta A} \rangle = \sum_n |c_{a_n}|^2 e^{i\eta a_n} + \int da_\xi |c_{a_\xi}|^2 e^{i\eta a_\xi} \tag{5.27}$$

o que nos permite concluir que

a. Medidas precisas (ideais) da variável dinâmica A podem fornecer como resultado apenas os autovalores a_n do operador A_{op} ($A_{op} v_{a_n} = a_n v_{a_n}$). Novamente, o fato de A_{op} ser hermitiano garante que os a_n são reais

b. A probabilidade de uma medida ideal fornecer como resultado a_n (do espectro discreto) é dada por $|c_{a_n}|^2$, onde c_{a_n} é o coeficiente da expansão da estado Ψ na base dos autovetores de A_{op}, normalizada segundo (5.18-5.19).

$$c_{a_n} = \langle v_{a_n} | \Psi \rangle$$

Analogamente , $|c_{a_\xi}|^2$ é a densidade de probabilidade de uma medida fornecer como resultado a_ξ, que é um autovalor do contínuo. Como um exemplo dos $|c_{a_\xi}|^2$ representando uma densidade de probabilidade, é bom lembrar que mostramos anteriormente que $\phi(\mathbf{p})$ definida através de

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{p}\ \phi(\mathbf{p}) \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade no espaço dos momentos. Note que na expressão acima $\frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$ é exatamente uma autofunção devidemente normalizada do operador momento.

5.8.3 Postulado III

A evolução temporal do estado do sistema é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H_{op} \Psi \ , \tag{5.28}$$

onde H_{op} é o operador hamiltoniana do sistema.

5.8.4 Postulado IV

O único ponto que ainda não tratamos anteriormente é o efeito de medidas sobre um sistema. É natural postularmos que

Imediatamente após uma medida ter fornecido como resultado a_n o estado do sistema passa a ser o autovetor correspondente v_{a_n}.

5.9 Relações de incerteza

Como uma aplicação do formalismo acima desenvolvido vamos deduzir as relações de incerteza. Suponhamos que desejamos medir simultaneamente dois observáveis, os quais estão associados aos operadores A e B tais que

$$[A, B] = iC \ . \tag{5.29}$$

O operador C acima definido é hermitiano (mostre). As variâncias ("erros") nas medidas de A e B são respectivamente dadas por

$$(\Delta A)^2 = \langle\Psi|\,(A - \langle A\rangle)^2\,\Psi\rangle \ , \tag{5.30}$$
$$(\Delta B)^2 = \langle\Psi|\,(B - \langle B\rangle)^2\,\Psi\rangle \ , \tag{5.31}$$

onde Ψ é o estado do sistema e $\langle A\rangle$ ($\langle B\rangle$) é o valor médio de A (B) neste estado. Para obtermos as relações de incerteza partimos da seguinte desigualdade

$$\langle[A - \langle A\rangle + i\lambda(B - \langle B\rangle)]\,\Psi|\,[A - \langle A\rangle + i\lambda(B - \langle B\rangle)]\,\Psi\rangle \geq 0 \ , \tag{5.32}$$

a qual nada mais é do que afirmar que o produto escalar de um vetor consigo mesmo é positivo ou nulo. Note que a desigualdade vale para qualquer valor da constante real λ. Esta expressão pode ser transformada em

$$\langle\Psi|\,(A - \langle A\rangle)^2\,\Psi\rangle + \lambda^2\langle\Psi|\,(B - \langle B\rangle)^2\,\Psi\rangle - \lambda\langle\Psi|C\Psi\rangle \geq 0 \ , \tag{5.33}$$

onde usamos que A e B são hermitianos e que seu comutador é iC. A igualdade vale para qualquer λ e em particular para o valor de λ que torna esta expressão mínima, o qual é dado por

$$\lambda = \frac{\langle\Psi|C\Psi\rangle}{2\langle\Psi|\,(B - \langle B\rangle)^2\,\Psi\rangle} \ . \tag{5.34}$$

Substituindo-se (5.34) em (5.33), e usando a definição das variâncias de A e B obtemos que

$$(\Delta A)^2\,(\Delta B)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\langle\Psi|C\Psi\rangle\right)^2 . \tag{5.35}$$

No caso particular de $A = p$ e $B = x$, temos que

$$\Delta p\;\Delta x \geq \frac{\hbar}{2} . \tag{5.36}$$

A partir da relação (5.32) e das propriedades do produto escalar, podemos ver que a igualdade é alcançada para os estados tais que

$$[A - \langle A\rangle + i\lambda(B - \langle B\rangle)]\,\Psi = 0 , \tag{5.37}$$

onde λ é dado por (5.34). Por exemplo, para $A = x$ e $B = p$ temos que

$$\Psi(x) = \left[2\pi(\Delta x)^2\right]^{-1/4} \exp\left[-\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + \frac{i\langle p\rangle x}{\hbar}\right] . \tag{5.38}$$