Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Física-Matemática II
Terceira Lista de Exercícios
Data de entrega: 20 de outubro de 2021

Prof. J. C. A. Barata

---

1) Demonstre que

$$J_{1/2}(z) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{sen}(z)}{z^{1/2}} \qquad \text{e} \qquad J_{-1/2}(z) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos(z)}{z^{1/2}}\;,$$

que

$$J_n(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - x\,\mathrm{sen}(\theta))\,d\theta\;, \qquad n = 0,\;1,\;2,\ldots\;,$$

que

$$J_n(x+y) \;=\; \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_{n-m}(y)\;, \qquad n = 0,\;1,\;2,\ldots\;,$$

e que

$$\cos(x) \;=\; J_0(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_{2k}(x)\;, \qquad \mathrm{sen}(x) \;=\; 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}J_{2k-1}(x)\;.$$

---

2) Prove as identidades

$$\Gamma(n+1+1/2) \;=\; \frac{\Gamma(3/2)\,(2n+1)!!}{2^n} \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(2n+1)!!}{2^n}\;, \quad n\in\mathbb{N},\; n\geq 0\;,$$

$$\Gamma(n+1+1/3) \;=\; 3^{-(n+1)}(3n+1)!!!\,\Gamma(1/3)\;, \quad n\in\mathbb{N},\; n\geq 0\;,$$

$$\Gamma(n+2/3) \;=\; 3^{-n}(3n-1)!!!\,\Gamma(2/3)\;, \quad n\in\mathbb{N},\; n\geq 1\;.$$

Usando o fato que $\Gamma(\overline{z}) = \overline{\Gamma(z)}$, prove que para todo $y\in\mathbb{R}$ vale

$$|\Gamma(iy)|^2 \;=\; \frac{\pi}{y\,\mathrm{senh}(\pi y)}$$

e que para todo $y\in\mathbb{R}$ vale

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right|^2 \;=\; \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}\;.$$

Mostre também que

$$|\Gamma(1+iy)|^2 \;=\; \frac{\pi y}{\mathrm{senh}(\pi y)}$$

para todo $y\in\mathbb{R}$. Por fim, mostre que

$$-\gamma \;=\; \Gamma'(1) \;=\; \int_0^{\infty} e^{-t}\ln(t)\,dt \;=\; \int_0^1 \ln\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)\,dt\;.$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni.

---

3) Demonstre que, para $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, tem-se

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan\theta)^{2z-1} d\theta \;=\; \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{(1-t)^z}\, dt \;=\; \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{1+u}\, du \;=\; \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi z)}\ . \tag{1}$$

Sugestão: constate que cada uma das integrais acima é igual a $B(z,\ 1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}$, onde B é a chamada *função Beta*.

---

4) Mostre que para $x > 0$ vale

$$\int_0^1 \left(\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{x-1} dt \;=\; \Gamma(x)\ .$$

---

5) Mostre que para $x > 0$ vale

$$\int_0^\infty e^{-t^x}\, dt \;=\; \Gamma\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ .$$

---

6) Mostre que para todo $\alpha \geq 0$ vale

$$\int_0^{\pi/2} \big(\mathrm{sen}\theta\big)^\alpha\, d\theta \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\ . \tag{2}$$
