

Capítulo 1

Campo Elétrico

1.1 Prelúdio

- O **Eletromagnetismo** é o estudo i) da *geração* e da *propagação* de campos *elétricos* e *magnéticos* por *cargas elétricas* e ii) da *dinâmica* de cargas em resposta a estes campos.
- A geração de campos por cargas é descrita pelas **Equações de Maxwell** e, em casos particulares, por leis simples como a *Lei de Coulomb* e a *Lei de Biot-Savart*.
- Uma vez criados, os campos se *propagam* como *ondas* no espaço com uma velocidade constante e igual à velocidade da *luz*.
- Na presença de campos elétricos e magnéticos, cargas sofrem *forças* elétricas e magnéticas de acordo com a **Força de Lorentz**.
- **Todos** os fenômenos eletromagnéticos são descritos de uma forma ou outra pelas Equações de Maxwell e pela Força de Lorentz. Elas, respectivamente, dizem às cargas como gerar campos, e aos campos como afetar as cargas.
- O eletromagnetismo tem grande importância *prática*, pois as interações eletromagnéticas descrevem átomos, moléculas, propriedades dos materiais, aparelhos eletrônicos, etc.
- Na Física, busca-se a **unificação** de leis fundamentais, o que significa que leis descrevendo fenômenos aparentemente distintos podem ser combinadas em uma descrição mais ampla e única dos fenômenos. O eletromagnetismo é o grande exemplo de unificação de leis físicas.
- Veremos que fenômenos elétricos e fenômenos magnéticos, inicialmente pensados como distintos, estão na verdade relacionados por um único formalismo, o Eletromagnetismo. Essa unificação vai além desses fenômenos, e unifica também a **Ótica** como parte do eletromagnetismo. Como veremos, a luz nada mais é do que ondas de campos eletromagnéticos se auto-criando e propagando; por isso chamamos a luz de *radiação eletromagnética*. Essa unificação gerou um grande debate no final do século XIX: se os campos se propagam com a velocidade da luz, com relação a que referencial deve ser medida essa velocidade? Essa questão foi o que levou Einstein a propor em 1905 a **Relatividade Especial**, que revolucionou as noções clássicas de espaço-tempo.

- Outro exemplo de unificação: a interação eletro-fraca, em que os fenômenos eletromagnéticos e a interação nuclear fraca são descritos por um formalismo único (prêmio Nobel de Física de 1979). Um dos grandes desafios da física moderna é unificar todas as interações da natureza em um formalismo único; o eletromagnetismo é o maior exemplo que inspira essa busca.
- Embora a dinâmica de galáxias no universo seja governada basicamente pela gravidade, vários efeitos eletromagnéticos são também importantes. Além disso, a maneira como astrônomos estudam galáxias também se relaciona com o eletromagnetismo. Afinal de contas, a única fonte de informação que temos das galáxias é a luz que elas nos enviam. Por meio desta radiação, devemos descobrir todas as propriedades da galáxia relevantes para estudos **astrofísicos** e **cosmológicos**. Essas propriedades incluem o tamanho da galáxia, o seu tipo, a sua morfologia, os elementos químicos que a compoem, sua temperatura, sua massa e sua distância até nós; tudo isso tem que ser inferido pelos *fótons* de luz enviados pelas galáxias.
- Portanto, os efeitos eletromagnéticos são de grande importância sob várias perspectivas. Eles descrevem a estrutura da matéria, permeiam a tecnologia de ponta e tem profunda relação com outros tópicos da física moderna e outras áreas da ciência.

1.2 Carga Elétrica

- A carga elétrica q é uma propriedade intrínseca fundamental das partículas.
- Existem dois tipos de carga elétrica: positiva e negativa.
- Cargas de mesmo sinal se repelem e cargas de sinal oposto se atraem mutuamente.
- A unidade de carga é o Coulomb, denotado C.
- O núcleo atômico é composto por prótons (partículas de carga positiva) e neutrons (partículas sem carga, i.e. eletricamente neutras). Os elétrons (partículas de carga negativa) orbitam os núcleos atômicos devido à atração eletromagnética. As cargas do próton e do elétron são idênticas e opostas, com magnitude $|q_e| = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$.
- A carga elétrica é *conservada*. Em qualquer processo físico, a carga total antes e depois é a mesma, i.e. cargas totais não são criadas nem destruídas. Se uma carga desaparece em algum local, ela deve re-aparecer em outro. Veremos que a conservação de cargas é automaticamente garantida pelas Equações de Maxwell e não precisa ser assumida independentemente.
- A carga elétrica é *quantizada*. Todas as cargas são múltiplos da carga do elétron, i.e. $Q = nq_e$ para algum n inteiro. Paul Dirac mostrou que, se existissem cargas *magnéticas* na natureza, isso explicaria por que a carga elétrica é quantizada. Infelizmente, cargas magnéticas nunca foram observadas e a quantização da carga continua sendo um fato basicamente empírico.

1.3 Força Elétrica: Lei de Coulomb

- Uma carga pontual q_1 separada por uma distância r de uma segunda carga q_2 , exerce sobre esta uma força elétrica \vec{F}_{12} mútua. A força é proporcional ao produto das cargas q_1q_2 e inversamente proporcional ao quadrado da distância r , sendo dada pela Lei de Coulomb:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}\hat{r}_{12}, \quad (\text{Lei de Coulomb}) \quad (1.1)$$

onde $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ é a permissividade elétrica no vácuo e \hat{r}_{12} é um vetor unitário na direção das cargas. A constante de proporcionalidade é dada pela combinação

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (1.2)$$

- O sentido da força depende do produto das cargas q_1q_2 . Para cargas de mesmo sinal, esse produto é positivo e temos força repulsiva. Para cargas de sinal oposto, o produto é negativo e temos força atrativa.
- A carga q_2 , por sua vez, exerce sobre a carga q_1 uma força \vec{F}_{21} de igual magnitude e direção oposta, conforme a 3ª Lei de Newton

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

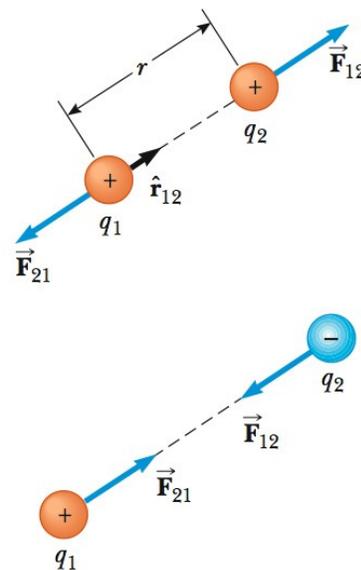


Figura 1.1: Força elétrica. (Serway)

1.4 Campo Elétrico

- Uma maneira conveniente de interpretar a interação eletromagnética das duas cargas q e q_0 , é pensar que a carga q gera no espaço ao seu redor um *campo elétrico* \vec{E}

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.3)$$

- O sentido do campo elétrico em \vec{r} é para fora da carga q , se $q > 0$ e para dentro da carga se $q < 0$.
- Pode-se pensar então que a força que uma carga q_0 sofre ao ser posicionada próxima à carga q resulta da interação de q_0 com o campo elétrico E criado por q . A força F_e fica então:

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E} \quad (1.4)$$

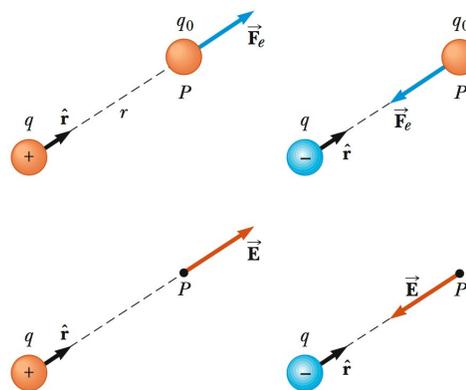


Figura 1.2: Campo elétrico. (Serway)

- Campo: força por unidade de carga: $\vec{E} = \vec{F}_e/q_0$.
- A vantagem dessa descrição é que o campo \vec{E} existe, mesmo na *ausência* da carga teste q_0 . Se perturbarmos a carga q , o campo não muda instantaneamente no espaço. A mudança se propaga com a velocidade da luz c , e somente após um tempo $t = r/c$, a perturbação chega à distância r . O campo passa a ter vida própria e se torna um ente com propriedades físicas, como energia, momento, etc. Portanto, o campo não é apenas um truque matemático para calcular forças, mas uma entidade física real.

- Não é coincidência que mudanças nos campos se propagam com a velocidade da luz. Como veremos adiante, a luz nada mais é do que campos elétricos e magnéticos se propagando no espaço-tempo.
- Na descrição *quântica* do eletromagnetismo, *partículas* de luz chamadas *fótons* propagam a interação eletromagnética entre cargas, viajando à velocidade da luz. Tanto a descrição clássica (campos), quanto a quântica (fótons) são corretas. Elas expressam a dualidade onda-partícula da natureza. Aqui focaremos na descrição clássica.
- Campos elétricos satisfazem o **princípio da superposição**. O campo total E_e^{tot} de um conjunto de cargas q_i com $i = 1, \dots, N$ é dado pela soma vetorial dos campos de cada uma das cargas individuais:

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_{q_i} \quad (1.5)$$

- Para distribuições *contínuas* de carga, somas são substituídas por *integrais*.

1.5 Linhas de Campo

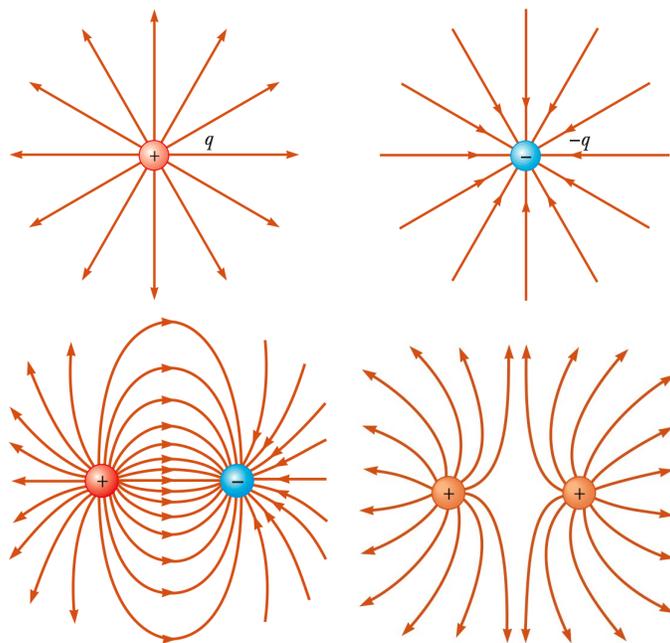


Figura 1.3: Linhas de campo elétrico devido a cargas pontuais. (Serway)

- Linhas de Campo: representação gráfica do campo elétrico no espaço, tais que:
 - O campo elétrico \vec{E} é sempre tangente à linha de campo.
 - A densidade de linhas é proporcional à intensidade do campo.
 - Linhas de campo não se cruzam, pois o campo elétrico é único em um ponto.

- Na Fig 1.3 , estão mostradas linhas de campo de certas configurações de cargas pontuais. As linhas saem de cargas positivas e se entram em cargas negativas. Naturalmente, a densidade de linhas é maior próximo às cargas.

1.6 Exemplos

Com o princípio de superposição em mente, vamos calcular o campo elétrico em algumas configurações de cargas. Para distribuições de carga, usamos cargas diferenciais $dq = \lambda dx = \sigma dA = \rho dV$, onde λ , σ e ρ são densidades linear, superficial e volumétrica de carga, respectivamente, e dx , dA e dV são correspondentes elementos infinitesimais de comprimento, área e volume.

1.6.1 Carga Pontual

Como visto acima, para uma carga pontual q , o campo é simplesmente dado pela Lei de Coulomb

$$\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1.6)$$

Uma carga pontual configura um *monopolo* elétrico.

1.6.2 Dipolo

Considere o dipolo elétrico, formado por duas cargas, sendo uma delas positiva de carga $+q$ e a outra negativa de carga $-q$, separadas por uma distancia d . Pelo princípio da superposição, o campo elétrico total em um ponto P no eixo do dipolo, a uma distância z do seu centro conforme a Fig 1.4, é dado por

$$\begin{aligned} E &= E_+ - E_- \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2 \left(1 - \frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2 \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d/z}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2} \\ &= \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{d}{2z}\right)^2\right]^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Para P distante do dipolo, i.e. para $z \gg d$, podemos desprezar o termo $d/2z$ entre parênteses, e obtemos:

$$E = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 z^3} \quad (\text{Dipolo Elétrico}) \quad (1.8)$$

onde $p = qd$ é o momento de dipolo. Pode-se mostrar que, ao longo do eixo perpendicular ao do dipolo, o campo também varia com a distância ao cubo, e portanto isso vale para qualquer ponto distante do dipolo.

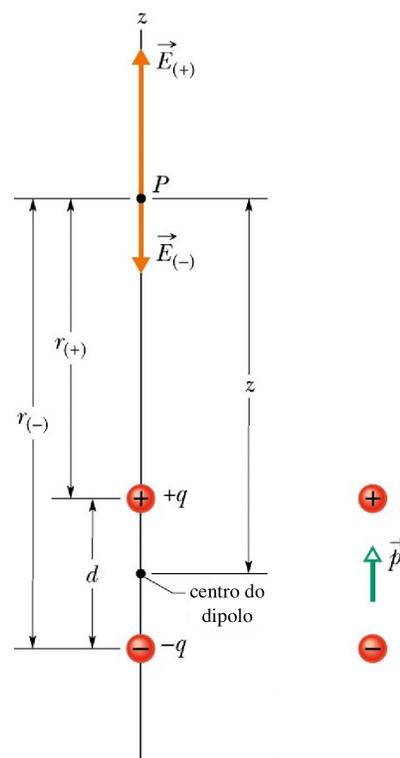


Figura 1.4: Campo elétrico de um dipolo elétrico. (Halliday)

Quando discutirmos potencial elétrico, veremos que para calcular o campo de um dipolo em um ponto geral, é mais fácil calcular primeiro o potencial elétrico e obter o campo elétrico como o gradiente do potencial.

1.6.3 Anel de carga

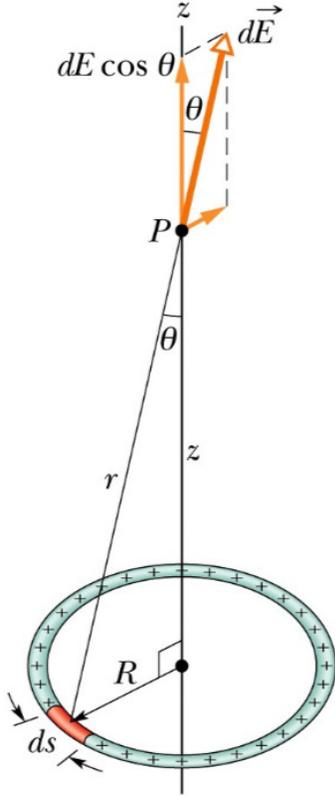


Figura 1.5: Anel carregado. (Halliday)

que será útil quando considerarmos uma casca esférica. Note que quando $R \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow \infty$, temos

$$E \approx \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2},$$

como esperado para uma carga pontual.

1.6.4 Disco de carga

Considere agora um disco carregado conforme a Fig 1.6. Neste caso podemos considerar um anel de raio (variável) r e espessura dr como um elemento infinitesimal do disco. Como acabamos de descobrir o campo gerado por um anel, temos

$$dE = \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}}$$

A carga dq contida em um elemento de área infinitesimal $dA = (2\pi r) dr$ é dada por

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r) dr$$

Considere um anel carregado conforme a Fig 1.5. A carga dq contida em um elemento de comprimento infinitesimal ds é dada por

$$dq = \lambda ds$$

Essa carga diferencial pode ser tratada como uma carga pontual e gera um campo infinitesimal dE

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

O campo elétrico total é dado somando (integrando) a contribuição de todos os elementos infinitesimais. Por simetria, o campo deve apontar na direção z , pois contribuições na direção radial se cancelam em pares simetricamente opostos. Temos então:

$$\begin{aligned} E &= \int_{\text{anel}} dE \cos \theta = \int_{\text{anel}} \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} \int_0^{2\pi R} ds \\ &= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

Finalmente, usando $q = \lambda 2\pi R$ e $r = \sqrt{z^2 + R^2}$, temos

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (1.9)$$

Uma outra forma de escrever esse resultado é

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (1.10)$$

Portanto, o campo total é dado por

$$\begin{aligned} E &= \int_{\text{disco}} dE = \int_{\text{disco}} \frac{z dq}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \int \frac{z\sigma(2\pi r) dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = z^2 + r^2$, $du = 2r dr$, temos

$$\begin{aligned} E &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{u^{1/2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2} \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[-\frac{2}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right]_0^R \\ &= \frac{z\sigma}{4\epsilon_0} \left[\frac{2}{z} - \frac{2}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \end{aligned}$$

ou seja

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right] \quad (1.11)$$

Note que quando $R \rightarrow \infty$, temos que o campo de uma placa infinita é constante:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.12)$$

Por outro lado, para $R \rightarrow 0$ ou $z \rightarrow \infty$, podemos fazer uma expansão binomial, obtendo

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2}} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2}$$

Neste caso, como a carga total do disco $q = \sigma(\pi R^2)$, temos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{2z^2} \right) = \frac{\sigma(\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \quad (1.13)$$

Ou seja, como esperado, nesse limite o disco parece uma carga pontual.

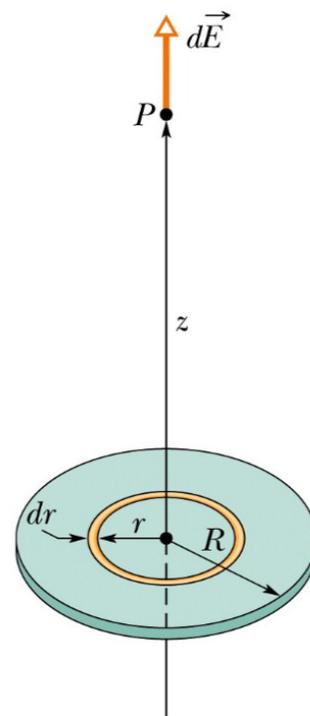


Figura 1.6: Disco carregado. (Halliday)

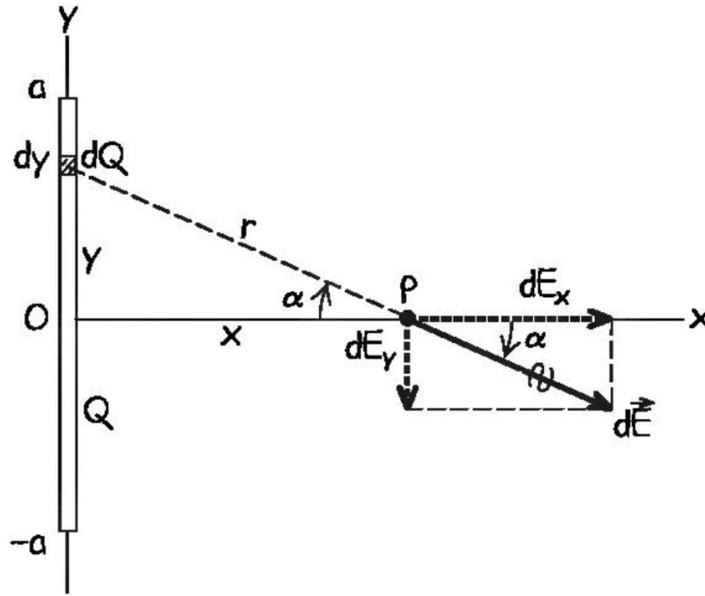


Figura 1.7: Linha carregada. (Young & Freedman)

1.6.5 Linha de carga

Considere agora o campo em um ponto x devido a uma linha de carga Q , comprimento $2a$ e densidade linear de carga constante $\lambda = dQ/dy = Q/2a$ como mostrado na Fig. 1.7

Por simetria, temos que $E_y = 0$, pois elementos opostos se cancelam. Mas vamos mostrar que isso resulta matematicamente também. A magnitude da contribuição diferencial dE devido ao elemento dQ é

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)}$$

temos

$$\begin{aligned} dE_x &= dE \cos \alpha = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)} \frac{x}{r} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ dE_y &= dE \sin \alpha = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2)} \frac{y}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

A integral em dE_y é idêntica ao do problema de um disco carregado. Obtemos

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-a}^a = 0 \quad (1.14)$$

como esperado. Para E_x obtemos

$$E_x = \int dE_x = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Precisamos calcular a integral

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{x^3} \int \frac{dy}{(1 + (y/x)^2)^{3/2}}$$

Fazendo $\frac{y}{x} = \tan \alpha$, temos $dy = x \frac{d \tan \alpha}{d \alpha} d \alpha = x(1 + \tan^2 \alpha) d \alpha = \frac{x d \alpha}{\cos^2 \alpha}$ e portanto

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{x^3} \int \frac{x d \alpha}{\cos^2 \alpha (\cos^{-2} \alpha)^{3/2}} = \frac{1}{x^2} \int du \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{x^2}$$

Imaginando um triângulo retângulo de catetos y e x e hipotenusa $\sqrt{x^2 + y^2}$, como $\tan \alpha = y/x$, segue que $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Portanto:

$$\int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.15)$$

e temos finalmente

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-a}^a = \frac{\lambda x}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2a}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right) \\ &= \frac{\lambda 2a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2 \sqrt{1 + (a/x)^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Novamente, no limite em que $x \rightarrow \infty$ ou $a \rightarrow 0$, usando $Q = \lambda 2a$, a linha parece uma carga pontual:

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad (1.17)$$

Por outro lado, para $a \rightarrow \infty$, temos uma linha infinita de carga e o campo é dado por

$$E_x = \frac{\lambda 2a}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x^2 (a/x)} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad (1.18)$$

1.6.6 Casca Esférica e Esfera

Considere agora uma casca esférica carregada dada na Fig 1.8. Vamos considerar primeiro o campo

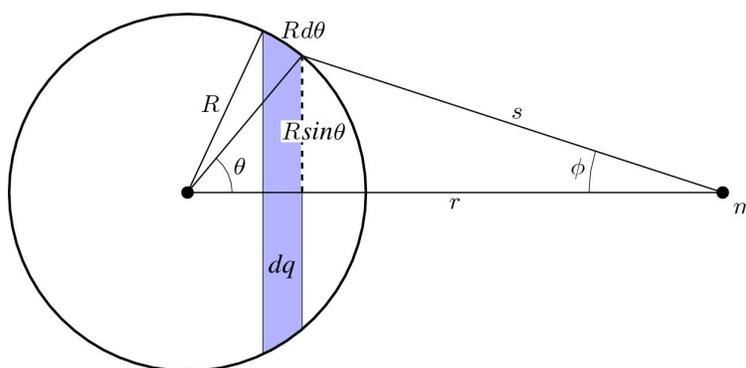


Figura 1.8: Casca esférica carregada. Campo fora da casca.

em um ponto m fora da casca esférica. O elemento infinitesimal indicado na figura é um anel com carga diferencial dq . Por simetria, o campo aponta ao longo da direção r , e o módulo é dado por

$$dE_r = dE \cos \phi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 s^2} \cos \phi$$

O elemento de carga dq é dado por

$$dq = \sigma(2\pi R \sin \theta)(Rd\theta)$$

e portanto

$$E_r = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 s^2} \cos \phi = \frac{\sigma(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sin \theta \cos \phi}{s^2} d\theta$$

Como s e ϕ são funções de θ , é conveniente fazer a integração em s . Usando a lei dos cossenos para ϕ e θ temos

$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta \\ R^2 &= r^2 + s^2 - 2rs \cos \phi \end{aligned}$$

Destas relações, temos

$$\begin{aligned} 2sds &= 2rR \sin \theta d\theta \rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{sds}{rR} \\ \cos \phi &= \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs} \end{aligned}$$

e o campo se torna

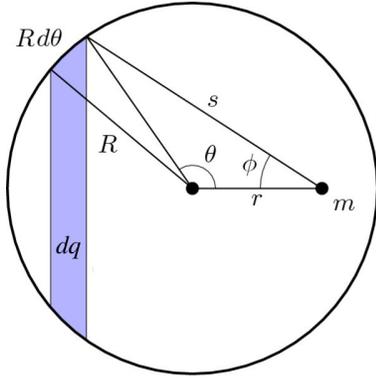


Figura 1.9: Casca esférica carregada. Campo dentro da casca.

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\sigma(2\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{sds}{rR} \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int ds \frac{r^2 + s^2 - R^2}{s^2} \\ &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int ds \left[1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right] \\ &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[s - \frac{r^2 - R^2}{s} \right]_{r-R}^{r+R} \\ &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[(r+R) - (r-R) - (r^2 - R^2) \left(\frac{1}{r+R} - \frac{1}{r-R} \right) \right] \\ &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[2R - (r^2 - R^2) \frac{(r-R) - (r+R)}{(r+R)(r-R)} \right] \\ &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} [2R + 2R] = \frac{\sigma(4\pi R^2)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned} \tag{1.19}$$

Portanto, o campo de uma casca esférica é o mesmo de uma carga pontual com carga q localizada no centro da casca esférica.

Para pontos dentro da casca esférica, o cálculo é idêntico, mas de acordo com a Fig 1.9. os

limites de integração são $s = R - r$ e $s = R + r$, o que resulta

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[s - \frac{r^2 - R^2}{s} \right]_{R-r}^{R+r} \\
 &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[(R+r) - (R-r) - (r^2 - R^2) \left(\frac{1}{(R+r)} - \frac{1}{R-r} \right) \right] \\
 &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[2r + (R^2 - r^2) \frac{(R-r) - (R+r)}{(R+r)(R-r)} \right] \\
 &= \frac{\sigma(\pi R)}{4\pi\epsilon_0 r^2} [2r - 2r] \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

i.e. o campo é nulo dentro da casca esférica. Esses resultados na casca esférica foram primeiro mostrados por Newton na teoria da gravitação, que também decaem com o quadrado da distância.

1.7 Esfera Sólida

Resultados similares aos da casca esférica se aplicam a uma esfera sólida. Para pontos fora da esfera, cada casca esférica infinitesimal pode ser substituída por uma carga pontual no centro da esfera. Somando a contribuição de todas as cascas, conclui-se que pode-se também substituir a esfera por uma carga pontual em seu centro com a carga total da esfera.

Para pontos dentro da esfera, cascas esféricas fora do ponto não contribuem. Pelo argumento do parágrafo anterior, a esfera imaginária delimitada pelo ponto pode ser substituída por uma carga pontual com carga igual à carga interna Q' (e não a carga total Q).

Essa carga interna é dada por $Q' = (r/R)^3 Q$. Portanto o campo é dado por

$$E_r = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \tag{1.21}$$

i.e. o campo cresce linearmente com a distância r .

1.8 Movimento de Carga em um Campo Elétrico

Considere uma carga q sob ação de um campo elétrico uniforme, como e.g. o campo criado por uma placa infinita. A segunda lei de Newton nos dá $F_e = qE = ma$, e a cinemática da carga é dada então pelas equações usuais da mecânica para uma aceleração constante

$$a = \frac{qE}{m} \tag{1.22}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{1.23}$$

$$v = v_0 + at \tag{1.24}$$