Capítulo 5

Corrente e Resistência

5.1 Corrente Elétrica

A corrente elétrica i em um fio condutor é definida como a carga que atravessa a área do fio por unidade de tempo:

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{5.1}$$

Unidade de corrente: Ampere [A] = [C/s].

Convenção: Sentido da corrente = sentido de movimento de cargas *positivas*.

Se n é o numero de partículas (portadores de carga) por unidade de volume que atravessam a área A de um fio condutor de comprimento Δx, q é a carga de cada particula, entao a carga ΔQ é dada por

$$\Delta Q = nq(A\Delta x) \tag{5.2}$$

Se as partículas se movem com velocidade v_d no condutor, então $\Delta x = v_d \Delta t$ e

$$\Delta Q = nqAv_d\Delta t \tag{5.3}$$

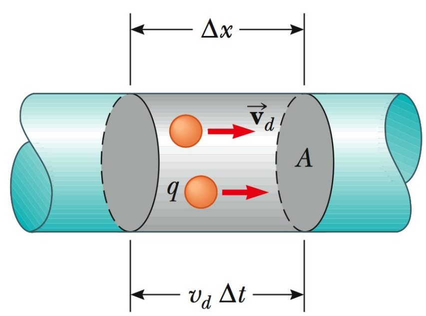

Figura 5.1: Cargas em movimento gerando corrente em um fio. (Serway)

e a corrente fica

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d \tag{5.4}$$

A densidade de corrente j é definida

$$j = \frac{i}{A} = nqv_d = \rho v_d \tag{5.5}$$

onde $\rho = nq$. O vetor $\vec{j}$ densidade de corrente é

$$\vec{j} = \rho \vec{v}_d \tag{5.6}$$

5.2 Resistência Elétrica e Lei de Ohm

Em alguns dispositivos de circuito, temos que $\vec{v}_d \propto \vec{E}$, i.e. $\vec{j} \propto \vec{E}$. A constante de proporcionalidade é a *condutividade* σ:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{5.7}$$

Considere um trecho de um fio condutor de área transversal A e comprimento l. A diferença de potencial ΔV entre as extremidades do trecho é

$$\Delta V = El \tag{5.8}$$

Por outro lado, a corrente no fio é dada por

$$i = jA = \sigma EA \tag{5.9}$$

Eliminando o campo E, obtemos

$$\Delta V = \frac{i}{\sigma A} l = \left(\frac{l}{\sigma A}\right) i \tag{5.10}$$

Portanto $\Delta V \propto i$, e a constante de proporcionalidade é a *resistencia* R:

$$\Delta V = Ri \tag{5.11}$$

ou

$$R = \frac{\Delta V}{i} \quad \text{(Lei de Ohm)} \tag{5.12}$$

Unidade de resistência: Ohm [Ω]=[V/A].

Objetos para os quais a resistência, definida pela equação acima, é constante são ditos *ohmicos*. Um exemplo é o *resistor*. Um exemplo de dispositivo não-ohmico é o *diodo*, um semi-condutor cuja resistência é alta para correntes em um sentido e baixa no outro sentido.

A resistência pode ser escrita como

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \frac{l}{A} \tag{5.13}$$

onde $\rho = 1/\sigma$ é a *resistividade* do material resistor.

5.3 Energia e Potência Elétrica

Em circuitos, a energia é transferida de uma fonte aos elétrons. Por exemplo, uma bateria converte energia química em energia cinética dos elétrons (corrente), e tambem em calor no condutor.

Quando uma corrente passa em um fio, ela transporta energia. A potência (energia por unidade de tempo) fornecida pela bateria para fazer a carga q se mover na diferença de potencial ΔV é

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(q\Delta V) = \frac{dq}{dt}\Delta V = i\Delta V \tag{5.14}$$

Unidade de potência: Watts [W]=[J/s].

Se essa energia for dissipada no resistor, temos que a potência dissipada é (usando $\Delta V = Ri$):

$$P = Ri^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} \tag{5.15}$$

5.4 Força Eletromotriz

Baterias: fornecem voltagem por meio de energia química → correntes estacionárias.
Voltagem nominal na ausência de corrente: $\mathcal{E}$ = força eletromotriz (fem).
Bateria tem resistência interna r que diminui voltagem de ri quando existe corrente.
Voltagem real entre extremidades da bateria é

$$\Delta V = \mathcal{E} - ri \tag{5.16}$$

Se houver um resistor com resistência R, a voltagem no resistor é ΔV e portanto

$$\Delta V = Ri \rightarrow \mathcal{E} - ri = Ri \rightarrow \mathcal{E} = Ri + ri \tag{5.17}$$

ou seja,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \tag{5.18}$$

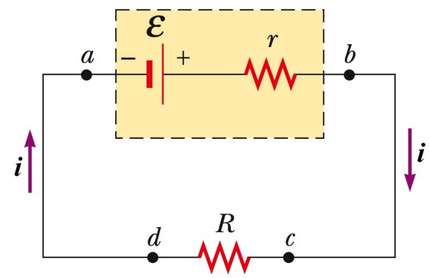

Figura 5.2: Circuito com resistor e bateria com resistencia interna. (Serway)

5.5 Combinação de Resistores

5.5.1 Resistores em Série

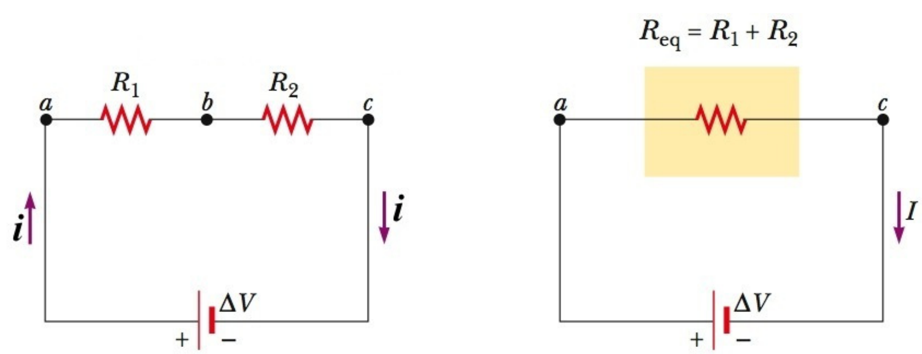

Figura 5.3: Resistores em série. (Halliday)

Para resistores em série, a corrente i é a mesma em todos os resistores. O resistor equivalente também será atravessado pela mesma corrente i, mas estará submetido a uma diferença de potencial igual à soma das diferenças de potencial de cada resistor:

$$V_1 = R_1 i, \quad V_2 = R_2 i, ... \tag{5.19}$$

A diferença de potencial total fica

$$V = V_1 + V_2 + ... = (R_1 + R_2 + ...)i = R_{\rm eq} i \tag{5.20}$$

e a resistência equivalente fica

$$R_{\rm eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i \tag{5.21}$$

5.5.2 Resistores em Paralelo

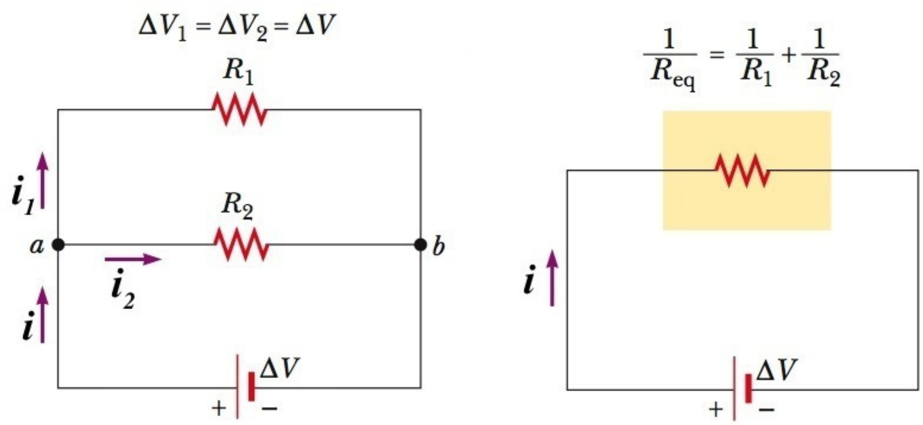

Figura 5.4: Resistores em paralelo. (Halliday)

Para resistores em paralelo, a voltagem V é a mesma em todos os resistores. O resistor equivalente também estará submetido à mesma voltagem V, mas, por conservação da carga, terá uma corrente igual à soma das correntes em cada resistor:

$$i_1 = \frac{V}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2}, ... \tag{5.22}$$

A corrente total fica

$$i = i_1 + i_2 + ... = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ...\right) = \frac{V}{R_{\text{eq}}} \tag{5.23}$$

Portanto, a resistência equivalente fica

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \tag{5.24}$$

5.6 Regras de Kirchhoff

1. **Lei dos nós**: A soma das correntes que entram em um nó é igual à corrente que sae do nó. Expressa Conservação da corrente: $\sum_{\text{nó}} i = 0$.

2. **Lei das malhas**: A soma das diferenças de potencial nos elementos de uma malha *fechada* do circuito é zero. Expressa independência do caminho para forcas conservativas: $\sum_{\text{malha}} V = 0$

Para aplicar essas regras em circuitos:

- Escolhemos direções arbitrárias para a(s) corrente(s). Se acharmos $i < 0$, o sentido é contrário.

- Iniciamos em um ponto arbitrário do circuito e atravessamos os vários dispositivos.

- Em transições $(- \rightarrow +)$, aumenta-se o potencial do valor correspondente, e.g. $+\mathcal{E}$ ou $+q/C$. Em transições $(+ \rightarrow -)$, diminui-se o potencial do valor correspondente, e.g. $-\mathcal{E}$ ou $-q/C$.

- Na *direção da corrente*, cada resistor diminui o potencial V de $-Ri$;
  Na *direção oposta à corrente*, cada resistor aumenta o potencial V de Ri.

5.7 Circuito RC

5.7.1 Carregando o capacitor

Usando a regra da malha, temos:

$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \tag{5.25}$$

Como $i = dq/dt$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} \tag{5.26}$$

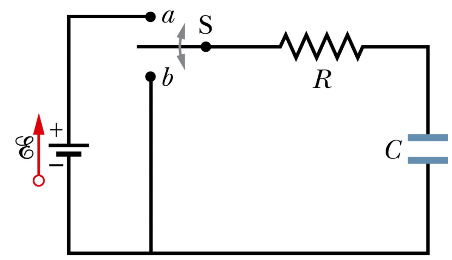

Figura 5.5: Capacitor carregando ou descarregando. (Halliday)

Multiplicando ambos os lados por $e^{t/RC}$, e usando a regra do produto $d(AB)/dt = (dA/dt)B + A(dB/dt)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt}\, e^{t/RC} + \frac{q}{RC}\, e^{t/RC} &= \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{t/RC} \\ \frac{d}{dt}\left(qe^{t/RC}\right) &= e^{t/RC}\frac{\mathcal{E}}{R} \end{aligned} \tag{5.27}$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\begin{aligned} qe^{t/RC} &= \int e^{t/RC}\frac{\mathcal{E}}{R}dt + K = \mathcal{E}Ce^{t/RC} + K \\ \rightarrow q(t) &= \mathcal{E}C + Ke^{-t/RC} \end{aligned} \tag{5.28}$$

onde K é uma constante. Chamando $q(t=0) = q_0$, e avaliando em $t = 0$ e assumindo que $q(0) = 0$ (capacitor descarregado inicialmente), determinamos K:

$$0 = q(0) = \mathcal{E}C + K \quad \rightarrow \quad K = -\mathcal{E}C. \tag{5.29}$$

e portanto a solução para a carga no tempo fica

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{5.30}$$

Quando $t \rightarrow \infty$, temos $q \rightarrow \mathcal{E}C$, i.e. o capacitor se carrega até o ponto em que a voltagem entre suas placas é $\mathcal{E}$.

A corrente é dada diferenciando

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \tag{5.31}$$

e vai a zero à medida que o capacitor é carregado.

5.7.2 Descarregando o capacitor

Com o capacitor carregado, podemos desconectar a bateria e obter a evolução temporal da carga quando o capacitor passa a ser descarregado. Neste caso temos

$$-Ri - \frac{q}{C} = 0 \rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0 \tag{5.32}$$

Procedimento idêntico nos leva a

$$q(t) = Ke^{-t/RC} \tag{5.33}$$

Como iniciamos com $q(0) = q_0$, onde $q_0 = \mathcal{E}C$ é a carga do capacitor, temos $K = q_0$ e

$$q(t) = \mathcal{E}Ce^{-t/RC} \tag{5.34}$$

e a corrente fica

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \tag{5.35}$$

5.8 Energia do Campo Elétrico Revisitada

Considere que estamos carregando um capacitor. Temos

$$\mathcal{E} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \tag{5.36}$$

Multiplicando essa equação por $i = dq/dt$, temos

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0 \tag{5.37}$$

O lado esquerdo representa a potência (energia por unidade de tempo) provida pela bateria. O primeiro termo do lado direito corresponde à potência dissipada como energia térmica no resistor. Por eliminação, o último termo representa a potência relacionada à energia armazenada no campo elétrico do capacitor:

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2C}\frac{dq^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) \;\rightarrow\; U_E = \frac{q^2}{2C} \tag{5.38}$$