Capítulo 8

Lei de Faraday

Ja vimos que cargas estáticas geram campos elétricos, enquanto cargas em movimento, i.e. correntes, geram campos magnéticos. Neste capítulo, veremos uma segunda maneira de gerar (*induzir*) campos elétricos: variando o fluxo magnético. Este resultado é formulado pela Lei de Faraday, que sintetiza uma série de observações em que ocorre *indução* do campo elétrico

8.1 Introdução

- Faraday observou que correntes variáveis em um circuito geram uma corrente em um circuito próximo.
- Com o conceito de campo magnético, ficou claro que a corrente variável do circuito produz um campo magnético variável, que, por sua vez, gera uma corrente elétrica no segundo circuito.
- Similarmente, movimento de um íma em um circuito gera neste uma corrente.
- Observa-se também que, mantendo o campo fixo, mas variando a área de um circuito em contato com o campo magnético, ou ainda a orientação do circuito relativa ao campo, uma corrente no circuito também é gerada.
- Em conjunto, estas observações indicam que a variação do *fluxo magnético* gera um campo elétrico associado a uma voltagem que, na presença de cargas, gera uma corrente induzida.

8.2 Indução: fem induzida

Antes de enunciar a Lei de Faraday, que fundamentalmente descreve a indução elétrica, vamos considerar uma situação especial em que ela pode ser "deduzida".

Considere, primeiramente uma barra condutora de comprimento l que se move em um campo B, com velocidade constante v. Uma carga $q < 0$ na barra sofre uma força magnética $F_B = qvB$ que cria uma corrente i vertical na barra.

Essa situação é equivalente a se houvesse um campo elétrico $E = vB$ vertical na barra, pois, neste caso, teríamos uma força elétrica $F_E = qE = qvB$. Portanto, é como se houvesse uma diferença de potencial ΔV na barra:

$$\Delta V = El = Blv \tag{8.1}$$

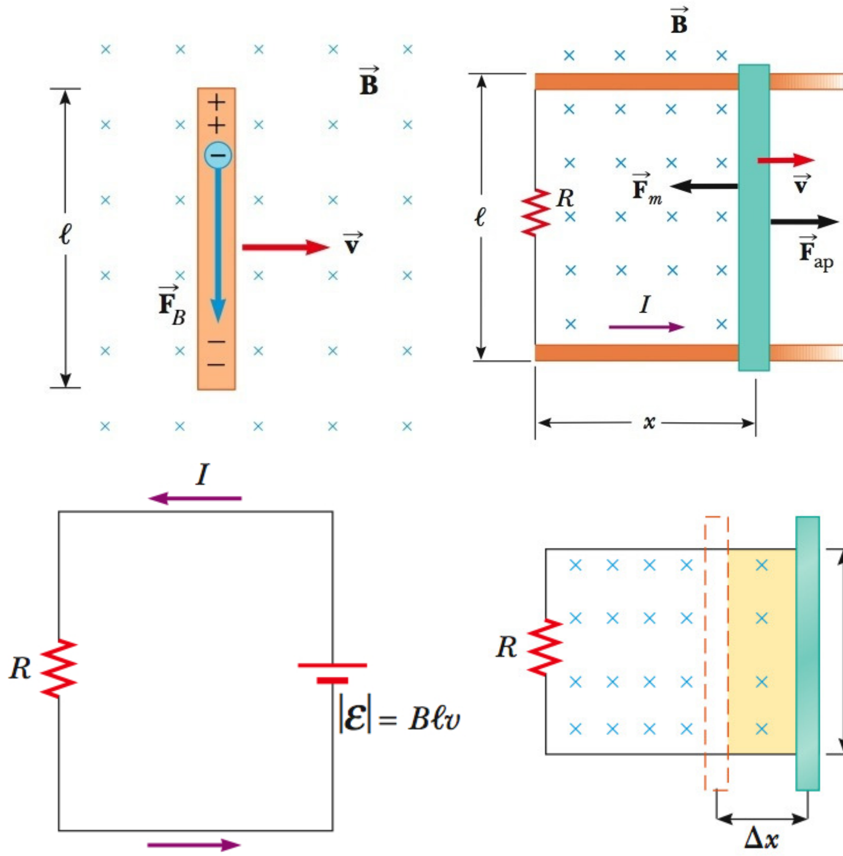

Figura 8.1: Uma barra condutora se move em um circuito fechado. Como as cargas estão confinadas no condutor, a força magnética as move para baixo, como se estivessem na presença de um campo elétrico $E = vB$. Verifica-se que a fem associada a E é igual à variação temporal do fluxo magnético no circuito.

De fato, no referencial que se move junto com a carga (no qual ela está em repouso), a carga não tem velocidade, e não pode sofrer força magnética! Entretanto a carga deve continuar sentindo uma força que a mova para baixo. A resolução desta questão é dada nas chamadas Transformações de Lorentz desenvolvidas na Relatividade Especial. A resposta é que, de fato, neste referencial existe um campo elétrico dado por $E = vB$!

Se agora conectarmos a barra vertical a um circuito fechado com uma resistência R, temos que essa situaçao é equivalente a termos uma força eletromotriz $\mathcal{E}$:

$$|\mathcal{E}| = Blv \tag{8.2}$$

A corrente no circuito fica então

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R} \tag{8.3}$$

Consideremos agora o fluxo magnético neste circuito:

$$\Phi_B = BA = Blx \tag{8.4}$$

e a variação temporal de Φ_B no circuito quando a barra se move com velocidade $v = \Delta x/\Delta t$ fica:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}(Blx) = Bl\frac{dx}{dt} = Blv = |\mathcal{E}| \tag{8.5}$$

Este resultado, obtido para este caso particular, na verdade vale sempre, mesmo quando o fluxo muda devido a e.g. um campo B variável e não ao movimento do circuito.

Como existe uma corrente i para cima no fio, este sofrerá uma força $F_m = Bil$ para a esquerda e, para que a velocidade seja de fato constante, é preciso aplicar na barra uma força $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_m$:

$$\vec{F}_{ap} = Bil = B\left(\frac{Blv}{R}\right)l = \frac{B^2l^2v}{R} \tag{8.6}$$

Esta força provê uma potência P_{ap} ao sistema:

$$P_{ap} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_{ap}\Delta x}{\Delta t} = F_{ap}v = \frac{B^2l^2v^2}{R} \tag{8.7}$$

Por outro lado, a potência dissipada no resistor é

$$P_{dis} = Ri^2 = R\left(\frac{Bl}{R}\right)^2 = \frac{B^2l^2v^2}{R} \tag{8.8}$$

i.e. a energia fornecida pela força aplicada é transferida para o movimento das cargas e dissipada no resistor. Note que o campo magnético, como sempre, não realiza trabalho.

8.3 Lei de Faraday

A Lei de Faraday formaliza as observações mencionadas na introdução e generaliza o resultado da última seção. Considere um circuito C e uma superfície aberta S qualquer que se apoia em C. O fluxo magnético na superfície S é dado por

$$\Phi_B^S = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{8.9}$$

Unidade de fluxo magnético: Weber [Wb]=[T][m^2].

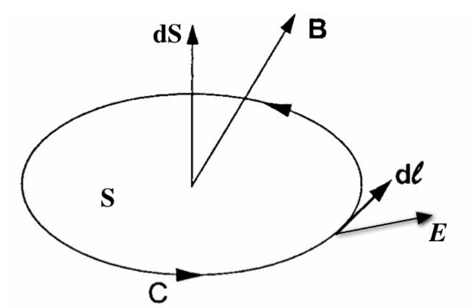

Figura 8.2: Superfície S apoiada no circuito C. A Lei de Faraday relaciona a variação temporal do fluxo de B em S com a circulação de E em C.

A Lei de Faraday diz que a variação temporal deste fluxo magnético em S induz a formação de um campo elétrico circulante em L de acordo com

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad = \quad -\frac{d\Phi_B^S}{dt} \quad \text{(Lei de Faraday)} \tag{8.10}$$

Note que

- C é a borda de S. A Lei de Faraday, portanto, relaciona, o fluxo de B em S com a circulação do campo E induzido na borda de S.
- Como $\vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS\cos\theta$, a variação temporal de Φ_B^S pode ocorrer porque o campo B varia no tempo, ou porque a área S em contato com B muda, ou ainda porque a orientação de S em relação a B, i.e. θ, muda.
- Por definição, $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ é a voltagem induzida no circuito. Se houver um resistor R, uma corrente $i = \mathcal{E}/R$, será induzida em C.
- Note o sinal negativo no lado direito, relacionado com a Lei de Lenz, a seguir.

8.4 Lei de Lenz

- Interpretação do sinal negativo da Lei de Faraday.
- Lei de Lenz: A variação do fluxo magnético induz um efeito (campo elétrico, voltagem, ou corrente induzida) que tende a anular esta variação.
- Permite sabermos a direção da circulação de E, i.e. a direção da voltagem e da corrente induzida como resultado da variação do fluxo.
- Vamos considerar alguns casos possíveis. Para isso, considere uma espira, i.e. um circuito L e uma superfície S que se apoia em L. Suponha que um campo B atravessa a superfície S, que permanece fixa.

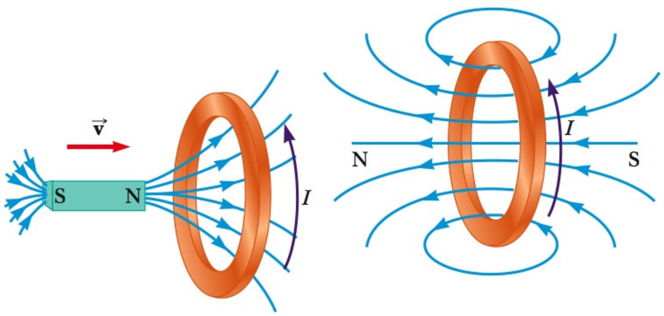

Figura 8.3: Lei de Lenz. Quando um íma se aproxima da espira, o fluxo através desta aumenta. A corrente induzida na espira produz um campo contrário ao campo original, a fim de anular a variação no fluxo original. Note ainda que a espira desenvolve um dipolo magnético para a esquerda, i.e. oposto ao do íma. Portanto, existirá uma força de repulsão entre eles, no sentido de afastar o íma e impedir o aumento do fluxo.

- Campo aumentando com tempo: $\partial B/\partial t > 0 \ \ \rightarrow \ \ d\Phi_B/dt > 0$ e $\mathcal{E} < 0$. Portanto, $\vec{E}$ terá a direção oposta a $d\vec{l}$, i.e. a corrente induzida i também terá direção oposta a $d\vec{l}$. Mas essa corrente induzida gera um campo B_{ind} que aponta no sentido oposto ao campo B original, i.e. B_{ind} aponta no sentido tal que tende a diminuir o fluxo magnético, cujo aumento foi a causa original da corrente.

  Imagine que isto acontece porque aproximamos um íma (que gera B) da espira, o íma e a espira sofrerão uma força de repulsão mútua (dois dipolos magnéticos em sentidos opostos), que, novamente, tende a *anular* o efeito que gera a corrente induzida.

- Campo diminuindo com o tempo: $\partial B/\partial t < 0 \ \ \rightarrow \ \ d\Phi_B/dt < 0$ e $\mathcal{E} > 0$. Portanto, $\vec{E}$ e i terão a mesma direção de $d\vec{l}$. Esta corrente induzida gera um campo B_{ind} que aponta no sentido do campo B original, i.e. B_{ind} tende a aumentar o fluxo magnético, cuja diminuição foi a causa original da corrente.

  Se isto ocorre porque afastamos um íma da espira, o íma e a espira sofrerão uma força de atração mútua (dois dipolos magnéticos no mesmo sentido), que, novamente, tende a *anular* o efeito que gera a corrente induzida.

- Se o lado direito da Lei de Faraday tivesse sinal positivo, teríamos um *run-away process*, i.e. o aumento do fluxo tenderia a aumentar o fluxo ainda mais, tendendo a um fluxo infinito. Assim, produziríamos uma corrente infinita com um mero movimento do magneto na direção da espira! Obviamente esta situação não conserva energia.

8.5 Aplicações

8.5.1 Exemplo 1

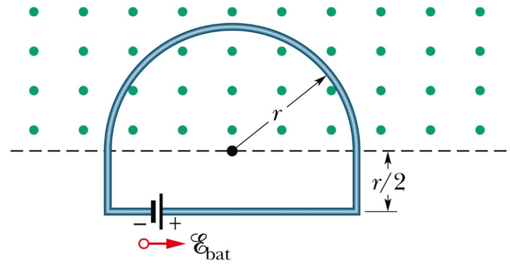

Figura 8.4: Bateria conectada a um circuito com campo magnético crescente. (Halliday)

Considere o circuito mostrado na Fig 8.4, que tem resistência R e está conectado a uma bateria com fem $\mathcal{E}_{bat}$. O campo magnético varia com o tempo como $B(t) = (t^2 + 2t + 7)$ T.

a) Qual a magnitude e direção da fem $\mathcal{E}_{ind}$ induzida no tempo t?

O fluxo no circuito é dado por

$$\Phi_B = BA = B\frac{\pi r^2}{2} \tag{8.11}$$

e a voltagem induzida fica

$$|\mathcal{E}_{ind}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\pi r^2}{2}\frac{d}{dt}(t^2 + 2t + 7) = \frac{\pi r^2}{2}(2t + 2) = \pi r^2(t + 1) \tag{8.12}$$

O fluxo está crescendo com o tempo. O campo B_{ind} induzido deve se opor a este crescimento e, portanto, apontar no sentido contrário a B, i.e. dentro da página. Portanto, i_{ind} e $\mathcal{E}_{ind}$ devem estar no sentido horário.

b) Qual a corrente no circuito no tempo t ?

Como $\mathcal{E}_{ind}$ tem direção oposta a $\mathcal{E}_{bat}$, a corrrente terá a direção da maior fem. A magnitude é

$$i = \frac{\mathcal{E}_{ind} - \mathcal{E}_{bat}}{R} = \frac{\pi r^2(t + 1) - \mathcal{E}_{bat}}{R} \tag{8.13}$$

No tempo $t = \mathcal{E}_{bat}/(\pi r^2) - 1$, a corrente é nula.

8.5.2 Exemplo 2

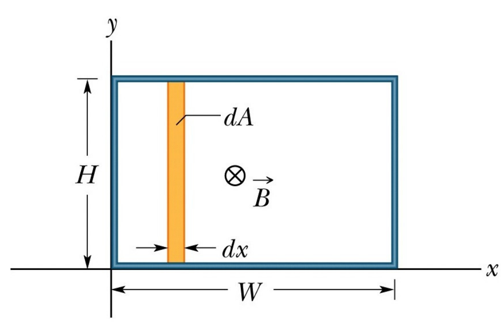

Figura 8.5: Circuito em um campo magnético variando no espaço e no tempo. Como B depende de x, consideramos o elemento de área $dA = Hdx$ na integração do fluxo. (Halliday)

Considere o circuito mostrado na Fig 8.5, atravessado por um campo $B = 4t^2x$, que varia no tempo e no espaço. Qual a fem $\mathcal{E}_{ind}$ induzida no tempo t?

O fluxo é dado por

$$\begin{aligned}
\Phi_B &= \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA = \int B(Hdx) \\
&= \int (4t^2x)Hdx = 4t^2H\int_0^W xdx \\
&= 4t^2H\frac{W^2}{2} = 2t^2W^2H
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\mathcal{E}_{ind}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = 4tW^2H \tag{8.14}$$

8.5.3 Exemplo 3

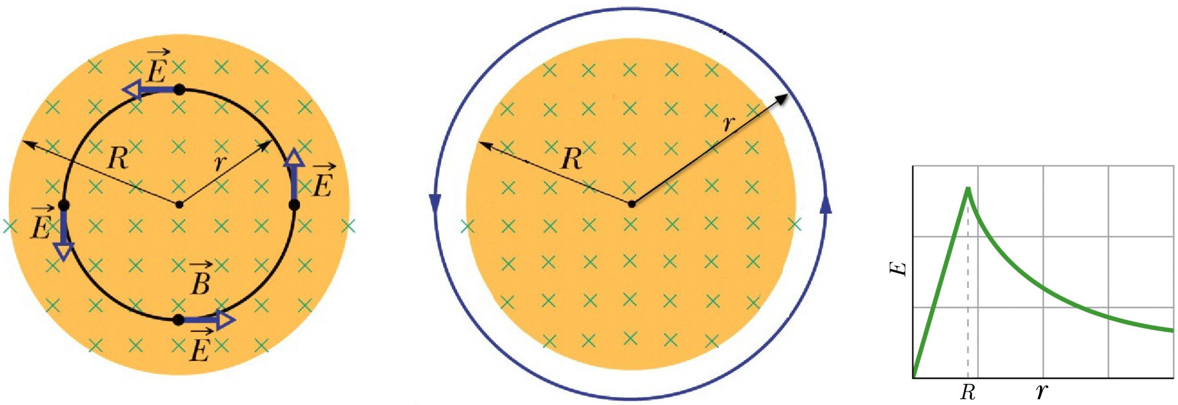

Figura 8.6: Tubo de raio R com campo magnético B que varia no tempo. Anéis de cobre são colocados dentro e fora do tubo, e têm um campo E circulante. O campo induzido cresce dentro do tubo e decai fora dele. (Halliday)

Considere uma tubo de raio R de campo magnético B uniforme, mas que varia no tempo com uma taxa constante dB/dt =const., e um anel de cobre de raio r concêntrico ao tubo. Encontre o campo E circulante dentro e fora do tubo.

Da simetria, temos que E deve ser circular no fio. Portanto para todos os pontos r, temos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint Edl = E\oint dl = E(2\pi r) \tag{8.15}$$

Para $r < R$, temos

$$\Phi_B = BA = B(\pi r^2) \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \tag{8.16}$$

Portanto, a Lei de Faraday nos dá

$$E(2\pi r) = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad \rightarrow \quad E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \tag{8.17}$$

Já para $r > R$, temos

$$\Phi_B = BA = B(\pi R^2) \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \tag{8.18}$$

Portanto,

$$E(2\pi r) = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad \rightarrow \quad E = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \tag{8.19}$$

8.5.4 Exemplo 4

Considere agora um gerador de corrente alternada, como na Fig 8.7. Vamos assumir que o circuito mostrado está girando com velocidade angular ω constante, impulsionado por um rotor externo.

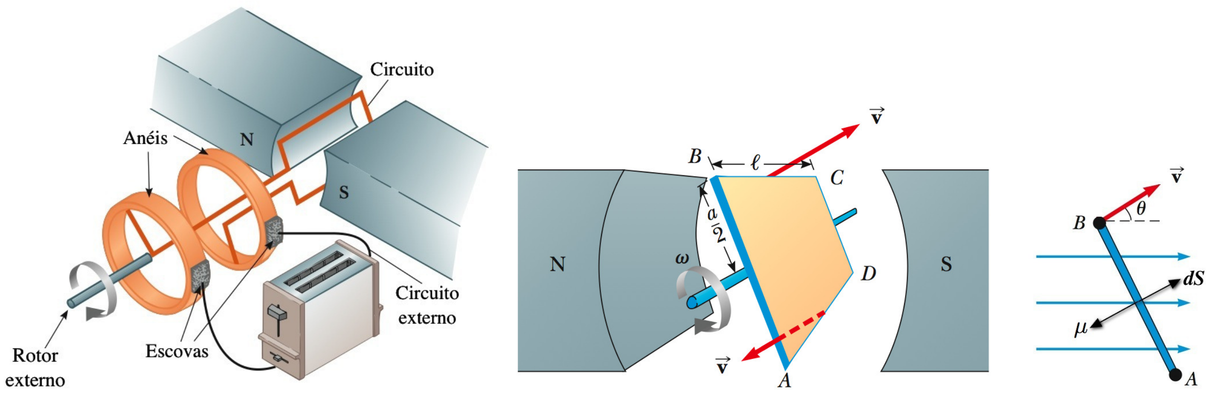

Figura 8.7: Gerador de corrente alternada. A rotação do circuito faz o fluxo magnético neste variar e induzir uma corrente alternada no circuito, convertendo a energia mecânica de rotação em energia elétrica. (Serway)

O fluxo magnético através do circuito rotante é

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int_{\text{circuito}} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{circuito}} BdS\cos\theta \\ &= B\cos\theta \int_{\text{circuito}} dS = BS\cos\theta\end{aligned}$$

Para ω = constante, temos $\theta = \omega t \to \Phi_B = BS\cos(\omega t)$. A voltagem induzida é então dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ind}(t) &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BS\omega(-\sin(\omega t)) \\ &= BS\omega\sin(\omega t) \qquad (8.20)\end{aligned}$$

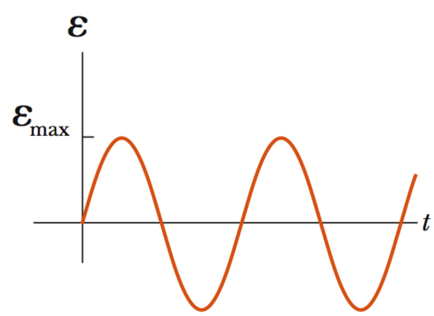

Figura 8.8: Voltagem senoidal obtida no gerador de corrente alternada. (Serway)

Conectando uma resistência R (ou uma torradeira como na Fig 8.7), a corrente induzida no circuito externo será

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_{ind}(t)}{R} = \frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t) \qquad (8.21)$$

A potência dissipada no resistor é

$$P_{dis} = Ri^2 = \frac{B^2S^2\omega^2}{R}\sin^2(\omega t) \qquad (8.22)$$

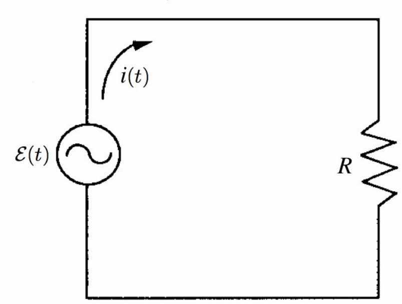

Figura 8.9: Voltagem e corrente senoidal conectada à resistência R.

Por outro lado, o circuito tem um momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$, e sofre um torque $\vec{\tau}$

$$\tau = |\vec{\mu} \times \vec{B}| \ = \ \mu B \sin(180^o - \theta) \ = \ \mu B \sin\theta \tag{8.23}$$

Como $\mu = iS$, temos

$$\tau = i(t) S B \sin(\omega t) \tag{8.24}$$

Portanto, para que ω seja de fato constante, é preciso que um torque externo $\vec{\tau}_{ap} = -\vec{\tau}$ seja aplicado ao circuito. A potência fornecida por $\vec{\tau}_{ap} = \vec{r} \times \vec{F}_{ap}$ é

$$\begin{aligned} P_{ap} &= \vec{F}_{ap} \cdot \vec{v} \ = \ F_{ap} v \ = \ \left(\frac{\tau_{ap}}{r}\right)(\omega r) \ = \ \tau_{ap}\omega \\ &= [i(t) S B \sin(\omega t)]\omega \ = \ i(t) S B \omega \sin(\omega t) \\ &= \left(\frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t)\right) S B \omega \sin(\omega t) \ = \ \frac{B^2 S^2 \omega^2}{R}\sin^2(\omega t) \ = \ P_{dis} \end{aligned}$$

Portanto, a potência mecânica aplicada ao circuito é convertida exatamente na energia dissipada no resistor.