

# Capítulo 1

## Ondas Eletromagnéticas

### 1.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell descrevem a produção e propagação de campos eletromagnéticos. Na forma diferencial são dadas por

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Inexistência de Monopólos Magnéticos}) \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Lei de indução de Faraday}) \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Lei de Ampere}) \quad (1.4)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga elétrica e  $\vec{j}$  é a densidade de corrente elétrica.

### 1.2 Equação de Onda Mecânica: Corda

Considere um pulso de onda que se propaga em uma corda esticada com extremidades fixas. Podemos obter a equação de ondas nesse caso usando a segunda Lei de Newton em um elemento da corda de comprimento  $\Delta x$ , e altura vertical  $u(x, t)$ , conforme a Fig. 1.1.

A força horizontal no elemento de corda é nula, já que este não se movimenta nesta direção. Já as forças verticais se somam para acelerar a corda. Aplicando a segunda Lei de Newton, obtemos a equação de movimento

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{Equação de Ondas na Corda}) \quad (1.5)$$

onde  $v$  é a velocidade da onda na direção de propagação, i.e. na direção  $x$ .

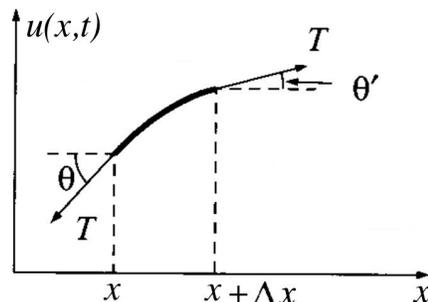


Figura 1.1: Força de tensão sobre um elemento de uma corda oscilante. Na horizontal, a força é nula, pois a corda não se move nessa direção. Na vertical, a força é dada pela segunda Lei de Newton, causando oscilação na corda. (Griffiths)

## 1.3 Equação de Ondas Eletromagnéticas

### 1.3.1 Solução no Vácuo

- No vácuo, i.e. na ausência de cargas ( $\rho = 0$ ) e correntes ( $j = 0$ ), as Eqs. de Maxwell ficam

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.9)$$

- Temos então

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ &= -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

e portanto

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

ou, definindo  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ ,

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.11)$$

- O mesmo procedimento nas equações para  $\vec{B}$  leva a

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.12)$$

i.e., no vácuo os campos  $E$  e  $B$  se propagam satisfazendo a equação de ondas clássica em 3 dimensões com velocidade  $v = c$ .

- Inserindo valores numéricos obtemos

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (1.13)$$

i.e. a velocidade de propagação, que resulta de quantidades puramente eletromagnéticas, é idêntica à velocidade da luz no vácuo.

- A luz é onda eletromagnética se propagando: **unificação do eletromagnetismo e da ótica.**
- Questão:  $c$  é a velocidade da luz com relação a que referencial? A resposta a esta pergunta levou Einstein a desenvolver a Relatividade Especial e, com ela, revolucionar a física clássica no início do século XX.

- Note que a Eq. 1.11 é vetorial e, portanto, cada componente de  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  satisfaz uma equação de onda. Idem para  $\vec{B}$ .
- Por exemplo, se  $E_x = E_x(z, t)$  é função apenas da coordenada  $z$  e do tempo  $t$ , mas não de  $y$  e  $z$ , e  $E_y = E_z = 0$ , temos

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

### Solução

Pode-se verificar que

$$E_x(z, t) = F(z \pm ct), \quad (1.15)$$

onde  $F$  é uma função qualquer, satisfaz a Eq. de onda unidimensional acima. Definindo  $\delta_{\pm} = z \pm ct$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial E_x}{\partial \delta_{\pm}} \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \delta_{\pm}^2} \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} &= \pm c \frac{\partial E_x}{\partial \delta_{\pm}} \rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial \delta_{\pm}^2} \end{aligned}$$

que, portanto, satisfaz a Eq. de ondas. Para encontrar  $\vec{B} = \vec{B}(z, t)$ , consideramos as Eqs. de Maxwell e concluímos que, excluindo soluções constantes, temos

$$\begin{aligned} B_x &= B_z = 0 \\ B_y(z, t) &= \frac{E_x(z, t)}{c} \end{aligned} \quad (1.16)$$

ou seja

$$\vec{E}(z, t) = F(z - ct)\hat{x} \quad (1.17)$$

$$\vec{B}(z, t) = \frac{F(z - ct)}{c}\hat{y} = \frac{1}{c}\hat{z} \times \vec{E} = \frac{\vec{c}}{c^2} \times \vec{E} \quad (1.18)$$

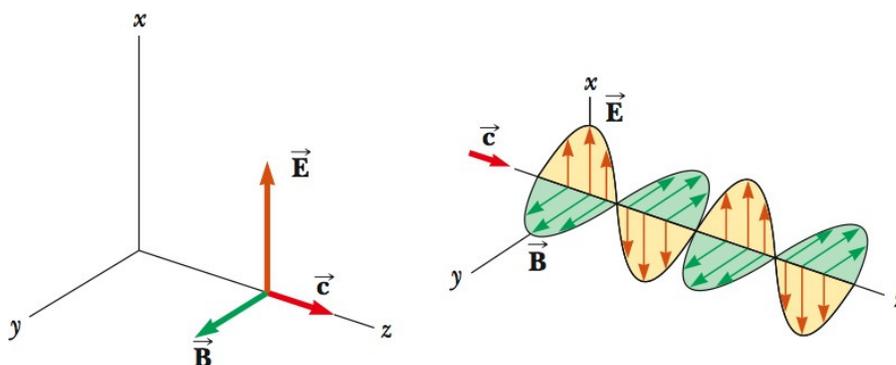


Figura 1.2: Propagação de ondas eletromagnéticas. Os campos  $E$  e  $B$  são perpendiculares entre si e à direção de propagação. (Serway)

Os campos se propagam ortogonais entre si e com a direção de propagação:  $\vec{E} \times \vec{B} \propto \vec{c}$

A solução  $F(z - ct)$  representa uma onda "progressiva", i.e. se propagando "para frente", enquanto  $F(z + ct)$  representa uma onda "regressiva".

## Ondas Planas

As soluções correspondentes a *ondas planas* monocromáticas são dadas por uma forma específica da função  $F$  dada em termos de senos/cossenos:

$$E_x(z, t) = A \cos[k(z \pm ct)] = A \cos(kz \pm \omega t), \quad (1.19)$$

onde  $\omega = kc$ . Definindo  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda,  $T$  o período e  $\nu$  a frequência da onda, temos  $c = \lambda/T = \omega/k$ . Luzes de diferentes cores correspondem a onda de diferentes frequências, formando um espectro eletromagnético ( Fig. 1.3 ).

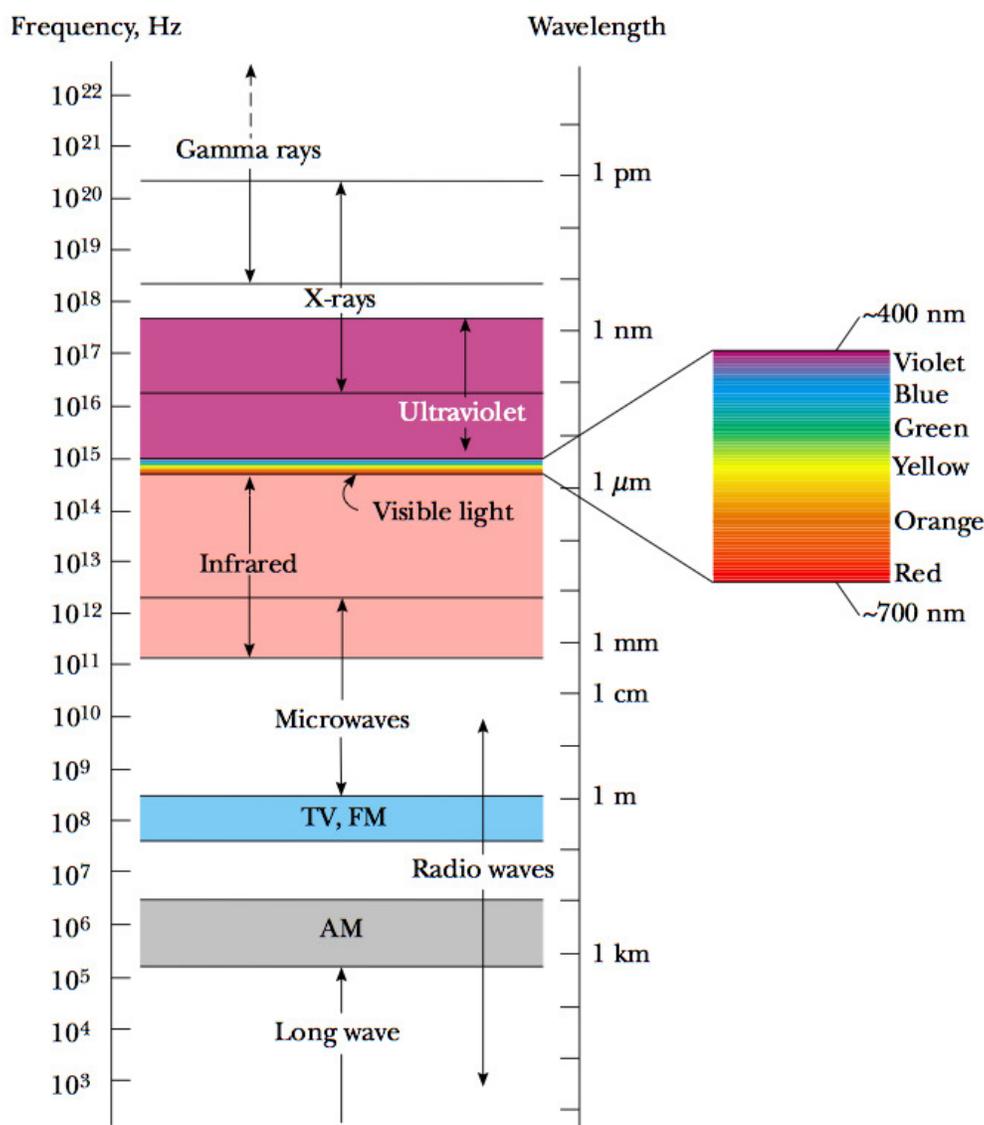


Figura 1.3: Espectro Eletromagnético. (Serway)

### Notação Complexa

Frequentemente usa-se a *notação complexa* para representar ondas planas:

$$E_x(z, t) = \text{Re} \left( E_{x,0} e^{i(kz \pm \omega t)} \right) \quad (1.20)$$

onde

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x. \quad (1.21)$$

Tomando a parte real (imaginária) da exponencial complexa, obtém-se novamente o cosseno (seno). Esta notação facilita alguns cálculos de e.g. interferência, em que se trabalha com a exponencial e, ao final, toma-se a parte real.

## 1.4 Equações de Maxwell em Meios Materiais

A polarização  $\vec{P}$  é definida como o momento de dipolo elétrico por unidade de volume:  $\vec{P} = \vec{p}/\Delta v$  e se relaciona com as cargas de polarização  $Q_P$  via

$$\begin{aligned} Q_P &= - \oint \vec{P} \cdot d\vec{A} \\ \rightarrow \int \rho_P dV &= - \int \nabla \cdot \vec{P} dV \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde do lado esquerdo usou-se a definição de densidade de carga e do lado direito usou-se o teorema de Gauss (do divergente). Portanto

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (1.23)$$

Se as cargas de polarização estiverem em movimento, terão associada uma densidade de corrente de polarização  $\vec{j}_P$ . Da Eq. 1.23, temos

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.24)$$

que comparada à Eq. da continuidade fornece  $j_P$ :

$$\vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (1.25)$$

Similarmente, a magnetização  $\vec{M}$  é definida como o momento de dipolo magnético por unidade de volume:  $\vec{M} = \vec{\mu}/\Delta v$  e se relaciona com a corrente de magnetização  $i_M$  via

$$\begin{aligned} i_M &= \oint \vec{M} \cdot d\vec{s} \\ \rightarrow \int \vec{j}_M \cdot d\vec{A} &= \int \nabla \times \vec{M} \cdot d\vec{A} \end{aligned} \quad (1.26)$$

onde do lado esquerdo usou-se a definição de densidade de corrente e do lado direito usou-se o teorema de Stokes. Portanto

$$\vec{j}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (1.27)$$

Com essas cargas (livres e de polarização) e correntes (livres, de polarização e de magnetização), podemos obter as Eqs. de Maxwell em meios materiais. A Lei de Gauss fica

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_l + \rho_P) = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \vec{P} \\ \rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_l\end{aligned}\quad (1.28)$$

ou, definindo o vetor deslocamento:

$$D = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.29)$$

temos

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l} \quad (1.30)$$

cuja versão integral (via Teorema de Gauss) é

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l} \quad (1.31)$$

Por outro lado, a Lei de Ampere-Maxwell fica

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_{tot} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \rightarrow \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} &= (\vec{j}_l + \vec{j}_M + \vec{j}_P) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= \vec{j}_l + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \rightarrow \nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) &= \vec{j}_l + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})\end{aligned}\quad (1.32)$$

ou, definindo o vetor  $\vec{H}$ :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.33)$$

temos

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (1.34)$$

cuja versão integral (via Teorema de Stokes) é

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_l + \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}} \quad (1.35)$$

As Equações de Maxwell sem fonte obviamente permanecem idênticas em meios materiais.

Como veremos, as equações sem fonte proverão condições de contorno contínuas, enquanto as equações com fontes derivadas acima proverão condições de contorno com descontinuidade das componentes do campo.

## 1.5 Condições de Contorno

O que acontece com os campos eletromagnéticos quando passamos de um meio material para outro?

Considere dois meios 1 e 2 separados por uma interface, e uma superfície gaussiana que atravessa ambos os meios como na Fig. 1.4 . A superfície tem "tampa" com área  $a$ , e altura  $h$  que faremos tender a 0. Aplicando a Lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_l$$

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{a} + \vec{D}_2 \cdot \vec{a} = \sigma_l a \quad (h \rightarrow 0)$$

que dá a condição de contorno:

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \sigma_l} \quad (1.36)$$

onde "n" denota a componente *normal* do campo à interface. Fazendo o mesmo procedimento com a Lei de Gauss do magnetismo, obtemos:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{B_{1n} - B_{2n} = 0} \quad (1.37)$$

Considere agora um circuito de largura  $l$  e altura  $h$  que também cruza os dois meios (Fig. 1.5). Aplicando a Lei de Faraday ao circuito, temos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{l} + \vec{E}_2 \cdot \vec{l} = 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

que dá a condição de contorno:

$$\boxed{\vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t} = 0} \quad (1.38)$$

onde "t" denota a componente *tangente* do campo à interface. Repetindo o procedimento com a Lei de Ampere-Maxwell, obtemos:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_l + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{l} + \vec{H}_2 \cdot \vec{l} = i_l \quad (h \rightarrow 0)$$

Definindo a densidade superficial de corrente por unidade de largura:

$$K_l = \frac{i_l}{l} = \left( \frac{\text{corrente}}{\text{comprimento}} \right) \rightarrow i_l = \vec{K}_l \cdot (\hat{n} \times \vec{l}) = (\vec{K}_l \times \hat{n}) \cdot \vec{l}$$

temos

$$\boxed{\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \vec{K}_l \times \hat{n}} \quad (1.39)$$

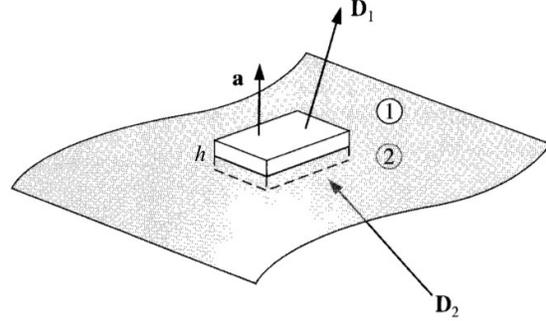


Figura 1.4: Campos eletromagnéticos separados por dois meios 1 e 2. Aplicamos a Lei de Gauss usando uma superfície em formato de caixa que atravessa ambos os meios. Quando  $h \rightarrow 0$ , a superfície lateral se anula e o fluxo por ela não contribui (Griffiths).

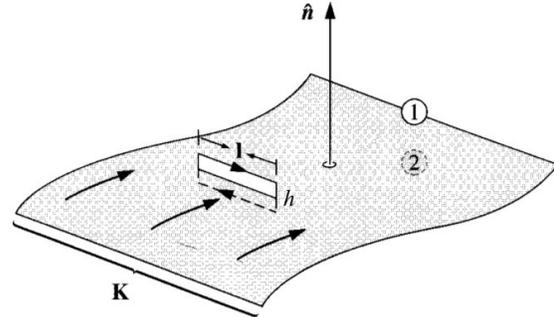


Figura 1.5: Aplicamos as Leis de Faraday e Ampere-Maxwell usando um circuito retangular que atravessa ambos os meios. Quando  $h \rightarrow 0$ , duas coisas acontecem: i) a circulação pela borda lateral do circuito se anula. ii) Como a área total do circuito vai a zero, o fluxo por ela também se anula (Griffiths).

### 1.5.1 Meios Lineares

Vamos considerar meios lineares para os quais valem as relações

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (1.40)$$

e portanto

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \quad (1.41)$$

onde  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$  e  $\mu = \mu_0(1 + \chi_M)$ . Neste caso, as 4 condições de contorno ficam

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \vec{E}_{1n} - \epsilon_2 \vec{E}_{2n} &= \sigma_l \\ \vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t} &= 0 \\ \vec{B}_{1n} - \vec{B}_{2n} &= 0 \\ \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} &= \vec{K}_l \times \hat{n} \end{aligned}$$

#### Ausência de Cargas Livres

No caso em que não há cargas nem correntes livres na interface, i.e.  $\sigma_l = K_l = 0$ , temos finalmente

$$\epsilon_1 \vec{E}_{1n} - \epsilon_2 \vec{E}_{2n} = 0 \quad (1.42)$$

$$\vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t} = 0 \quad (1.43)$$

$$\vec{B}_{1n} - \vec{B}_{2n} = 0 \quad (1.44)$$

$$\frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} = 0 \quad (1.45)$$

Neste caso, as Equações de Maxwell ficam

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.46)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.47)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.48)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.49)$$

e a equação de ondas para e.g.  $\vec{E}$  fica

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{onde } v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (\text{no vácuo } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}) \quad (1.50)$$

Dada a velocidade de propagação no meio  $v$ , podemos definir o *índice de refração*  $n$ :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (1.51)$$

As relações vistas no vácuo continuam válidas trocando  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu$  e  $c \rightarrow v$ :

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon E^2 + \frac{B^2}{\mu^2} \right), \quad (1.52)$$

$$B_0 = \frac{E_0}{v} \quad (\text{amplitudes de onda plana}) \quad (1.53)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (1.54)$$

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad (1.55)$$

## 1.6 Reflexão e Refração: Incidência Normal

Como exemplo de aplicação das condições de contorno em meios lineares e na ausência de cargas livres na interface dos meios, vamos considerar o caso de incidência normal à interface (plano  $xy$  com  $z = 0$ ), i.e. a onda incidente no meio 1 tem velocidade  $\vec{v}_1$  na direção  $z$  perpendicular à interface, como mostrado na Fig. 1.6.

Os campos incidente (meio 1) são:

$$\vec{E}_i(z, t) = E_{0i} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x} \quad (1.56)$$

$$\vec{B}_i(z, t) = \frac{E_{0i}}{v_1} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y} \quad (1.57)$$

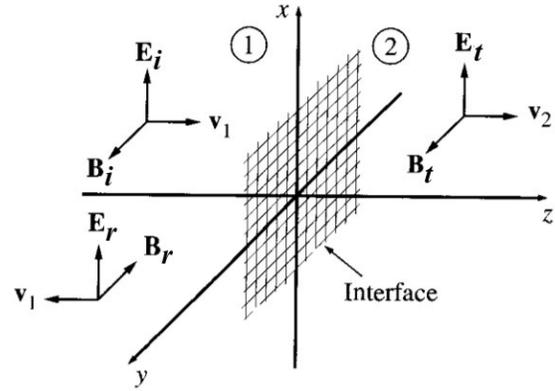


Figura 1.6: Reflexão e Refração de um raio de luz para incidência normal (Griffiths).

que dão origem aos campos refletidos (meio 1):

$$\vec{E}_r(z, t) = E_{0r} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x} \quad (1.58)$$

$$\vec{B}_r(z, t) = -\frac{E_{0r}}{v_1} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{y} \quad (1.59)$$

e aos campos refratados ou transmitidos (meio 2):

$$\vec{E}_t(z, t) = E_{0t} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x} \quad (1.60)$$

$$\vec{B}_t(z, t) = \frac{E_{0t}}{v_2} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y} \quad (1.61)$$

Note que a frequência  $\omega$  é a mesma nos meios 1 e 2, dependendo apenas da fonte da onda, enquanto o vetor de onda  $k = \omega/v$  depende do meio.

Para incidência normal, todos os campos são *paralelos* à interface. Portanto usaremos as duas condições de contorno para campos paralelos na interface ( $z = 0$ ):

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1t} &= \vec{E}_{2t} \quad (z = 0) \\ \vec{E}_i(z, t) + \vec{E}_r(z, t) &= \vec{E}_t(z, t) \quad (z = 0) \\ (E_{0i} e^{-i\omega t} + E_{0r} e^{-i\omega t}) \hat{x} &= E_{0t} e^{-i\omega t} \hat{x} \\ \rightarrow & \boxed{E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}} \end{aligned} \quad (1.62)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1t} &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2t} \quad (z = 0) \\
\frac{1}{\mu_1} (\vec{B}_i(z, t) + \vec{B}_r(z, t)) &= \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_t(z, t) \quad (z = 0) \\
\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{E_{0i}}{v_1} - \frac{E_{0r}}{v_1} \right) &= \frac{1}{\mu_2} \frac{E_{0t}}{v_2} \\
\rightarrow \quad \boxed{E_{0i} - E_{0r} = \beta E_{0t}} &\text{ onde } \boxed{\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}} \quad (1.63)
\end{aligned}$$

Somando as 2 equações acima, temos

$$2E_{0i} = (1 + \beta)E_{0t} \rightarrow \boxed{E_{0t} = \frac{2}{1 + \beta} E_{0i}} \quad (1.64)$$

e da primeira equação

$$E_{0r} = E_{0t} - E_{0i} = \left( \frac{2}{1 + \beta} - 1 \right) E_{0i} \rightarrow \boxed{E_{0r} = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) E_{0i}} \quad (1.65)$$

Note que  $E_{0r}$  tem sinal oposto a  $E_{0i}$  se  $\beta > 1$ . Para a maioria dos meios  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ , e portanto  $\vec{E}_r$  tem direção oposta a  $\vec{E}_i$  se  $v_1 > v_2$  ou  $n_1 < n_2$ .

A intensidade pode ser definida para cada componente do campo elétrico:

$$I_{(i,r)} = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0(i,r)}^2 \quad (1.66)$$

$$I_t = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0t}^2 \quad (1.67)$$

e os coeficientes de reflexão  $R$  e transmissão  $T$  são dados por:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 \rightarrow \boxed{R = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2} \quad (1.68)$$

e

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{2}{1 + \beta} \right)^2$$

e como  $v_1^2 = 1/(\mu_1 \epsilon_1) \rightarrow \epsilon_1 v_1 = 1/(\mu_1 v_1)$ , temos

$$\frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \beta \quad (1.69)$$

Portanto

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2}} \quad (1.70)$$

Note que, por conservação de energia do campo, temos

$$R + T = \frac{(1 - \beta)^2 + 4\beta}{(1 + \beta)^2} = \frac{1 - 2\beta + \beta^2 + 4\beta}{(1 + \beta)^2} = \frac{1 + 2\beta + \beta^2}{(1 + \beta)^2} = \frac{(1 + \beta)^2}{(1 + \beta)^2} = 1 \quad (1.71)$$