

Capítulo 3

Interferência e Difração

A natureza ondulatória da luz se mostra nas propriedades de interferência e difração, que vamos considerar neste capítulo.

3.1 Interferência por fenda dupla

Em 1810, Young demonstrou experimentalmente que a luz é uma onda. Note que isso ocorreu muito antes do estabelecimento das Eqs. de Maxwell, que forneceram argumentos teóricos para a natureza ondulatória da luz.

O diagrama do aparato usado por Young é mostrado na Fig 3.1. Um feixe de luz coerente (com mesma fase de onda), proveniente de uma fenda S_0 , incide sobre duas fendas S_1 e S_2 , atravessando-as, difratando e atingindo uma tela de observação C . As luzes proveniente de S_1 e S_2 se combinam formando um padrão de interferência na tela, com regiões claras e escuras (intensidades máxima e mínima).

A explicação ondulatória é que as luzes provenientes de S_1 e S_2 se somam na tela, interferindo de forma construtiva ou destrutiva, dependendo de suas diferenças de fase, como mostrado na Fig. 3.2.

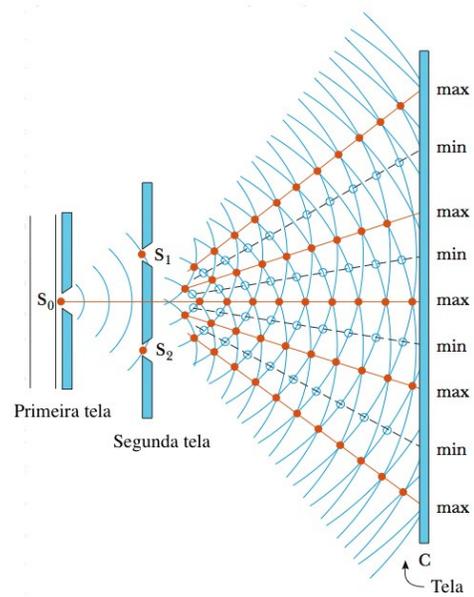


Figura 3.1: Aparato do experimento de Young. Uma fonte de luz coerente incide sobre as fendas S_1 e S_2 e difratam até a tela de observação, onde formam um padrão de interferência. (Serway)

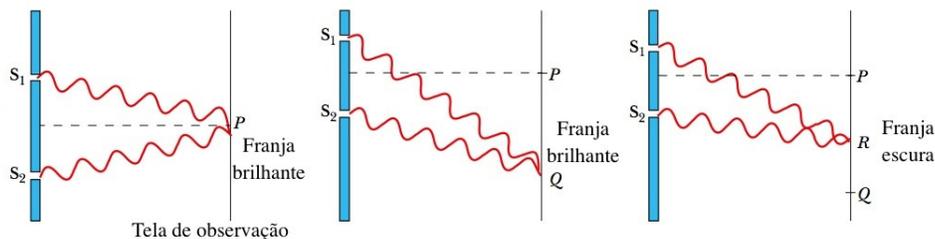


Figura 3.2: Interferência construtiva e destrutiva das ondas que passam por cada fenda. (Serway)

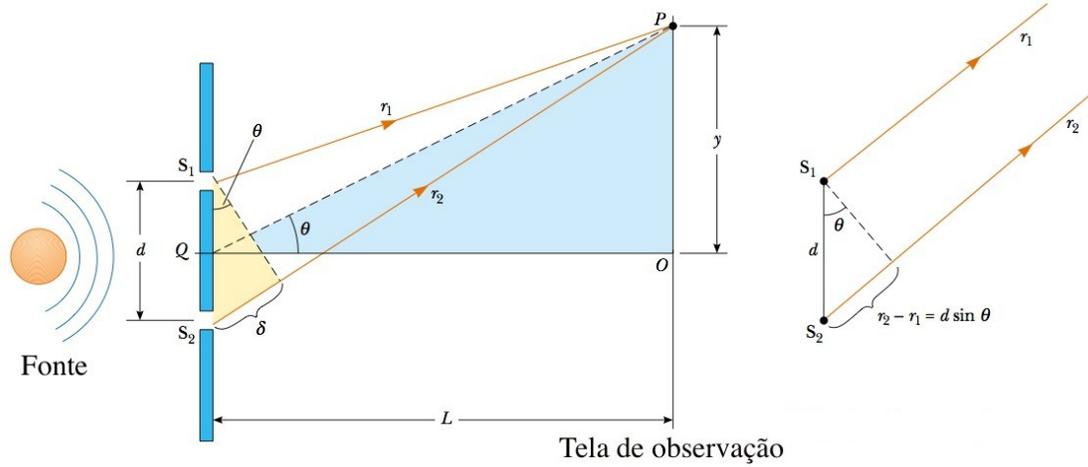


Figura 3.3: A interferência das ondas provenientes de S_1 e S_2 depende da diferença de fase, ou diferença de caminho $d \sin \theta$ entre as ondas. (Serway)

Vamos tomar o campo elétrico $E(x, t)$ com a representação complexa de uma onda plana:

$$E(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right] = \text{Re} \left[v(x) e^{-i\omega t} \right] \quad \text{onde} \quad v(x) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (3.1)$$

e a intensidade associada ao campo $I(x) = \langle E^2 \rangle = |v(x)|^2 = A^2$. O campo total no ponto P é a soma das contribuições das duas fendas S_1 e S_2 :

$$\begin{aligned} E(\vec{x}, t) &= E_1(\vec{x}, t) + E_2(\vec{x}, t) = A e^{i(kr_1 - \omega t)} + A e^{i(kr_2 - \omega t)} \\ &= A e^{-i\omega t} \left[e^{ikr_1} + e^{ikr_2} \right] \\ &= v(x) e^{-i\omega t} \quad \text{onde} \quad v(x) = A \left[e^{ikr_1} + e^{ikr_2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Na aproximação em que $L \gg d$, temos

$$r_1 = R - \frac{d}{2} \sin \theta \quad (3.3)$$

$$r_2 = R + \frac{d}{2} \sin \theta \quad (3.4)$$

e $d \sin \theta = r_2 - r_1$. Portanto

$$\begin{aligned} v(x) &= A \left[e^{i(kR - \frac{kd}{2} \sin \theta)} + e^{i(kR + \frac{kd}{2} \sin \theta)} \right] \\ &= A e^{ikR} \left[e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2} \right] \quad \text{onde} \quad \delta = kd \sin \theta = k(r_2 - r_1) \\ &= 2A e^{ikR} \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

e a intensidade resultante em P fica

$$I = |v(x)|^2 = 4A^2 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (3.6)$$

Como a intensidade de uma fenda isolada seria $I_1 = |v_1(x)|^2 = A^2$, temos

$$I = 4I_1 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \quad (3.7)$$

Ou seja, a intensidade de fato oscila entre $4I_1$ e 0. As condições para interferência construtiva (máximos) ficam (usando $k = 2\pi/\lambda$):

$$\begin{aligned} \delta &= 2n\pi \\ kd \sin \theta &= 2n\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta &= 2n\pi \rightarrow \boxed{r_2 - r_1 = d \sin \theta = n\lambda} \quad (\text{Máximo}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

e para interferência destrutiva (mínimos) temos

$$\delta = (2n + 1)\pi \rightarrow \boxed{r_2 - r_1 = d \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2} \right) \lambda} \quad (\text{Mínimo}) \quad (3.9)$$

Para ângulos pequenos a separação entre os máximos (mínimos) é de

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} \quad (3.10)$$

Note que a intensidade que passa pelas duas fendas seria $2I_1$. Como podemos ter então pontos com $I = 4I_1$? Se calcularmos a intensidade média sobre várias regiões com franjas de máximos e mínimos, como $\langle \cos^2 \delta/2 \rangle = 1/2$, temos

$$\langle I \rangle = 2I_1 \quad (3.11)$$

ou seja, a intensidade média é igual à intensidade das duas fendas. Há apenas uma redistribuição de energia, com regiões com 2 vezes o valor médio e regiões com intensidade nula. Nas regiões onde $I = 0$, o campo é nulo, ou seja, luz superposta com luz dando escuridão.

Como $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, podemos escrever

$$I = 4I_1 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) = 2I_1(1 + \cos \delta) = 2I_1 + 2I_1 \cos \delta \quad (3.12)$$

O segundo termo, $2I_1 \cos \delta$, é chamado *termo de interferência*, e sua presença é prova de que a luz é uma onda. Tivesse ela apenas caráter corpuscular, esperaríamos $I = 2I_1$ em todos os pontos.

3.2 Mudança de Fase na Reflexão

Lembre que para reflexão em incidência oblíqua, obtemos a relação entre campo refletido e incidente:

$$E_{r\parallel} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{i\parallel} \quad \text{e} \quad E_{r\perp} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} E_{i\perp} \quad (3.13)$$

onde $\alpha = \cos \theta_t / \cos \theta_i$ e $\beta = n_2/n_1 = \sin \theta_i / \sin \theta_t$. Vamos considerar $n_2 > n_1$, i.e. incidência do meio menos para o mais refringente. Neste caso, $\theta_t < \theta_i$ e temos

$$\alpha - \beta = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_t - \sin \theta_i \cos \theta_i}{\cos \theta_i \sin \theta_t} = \frac{\sin(2\theta_t) - \sin(2\theta_i)}{\cos \theta_i \sin \theta_t} < 0 \quad (3.14)$$

Além disso

$$\theta_t < \theta_i \rightarrow \cos \theta_t > \cos \theta_i \rightarrow \alpha > 1 \quad (3.15)$$

$$\theta_t < \theta_i \rightarrow \sin \theta_t < \sin \theta_i \rightarrow \beta > 1 \quad (3.16)$$

e portanto

$$1 - \alpha\beta < 0 \quad (3.17)$$

Desta forma, E_r terá sinal *oposto* a E_i tanto para a componente \parallel quanto para a \perp . Mas como

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad (3.18)$$

esse sinal negativo implica uma mudança de fase de onda de π na onda refletida. Isso ocorre sempre que a reflexão ocorre com incidência do meio menos para o mais refrativo.

Para uma mudança de fase de π , usando $k = 2\pi/\lambda$ temos:

$$E(x, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \rightarrow E_0 e^{i\pi} e^{i(kx - \omega t)} = E_0 e^{i[k(x + \pi/k) - \omega t]} = E_0 e^{i[k(x + \lambda/2) - \omega t]} = E(x + \lambda/2, t)$$

ou seja, a mudança de fase de π implica uma defasagem espacial de $\lambda/2$: $x \rightarrow x + \lambda/2$.

No caso contrário em que $n_2 < n_1$, não há mudança de fase. Já nos raios refratados:

$$E_{t\parallel} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{i\parallel} \quad \text{e} \quad E_{t\perp} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_{i\parallel}, \quad (3.19)$$

os coeficientes são sempre positivos, e também não há mudança de fase.

3.3 Interferência em Filmes Finos

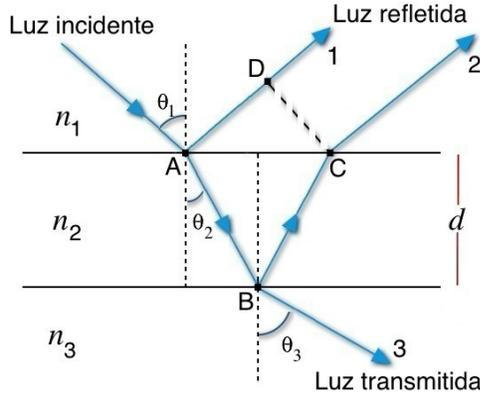


Figura 3.4: Interferência em uma película fina de espessura d .

Considere uma película plana de espessura d , como mostrada na Fig. 3.4. Um raio incide no ponto A da interface do meio 1 com a película, fazendo um ângulo θ_1 . Parte deste raio é refletida (raio 1), e outra parte é transmitida ao meio 2 pelo trecho AB . Parte deste raio transmitido é refletido de volta ao meio incidente via o trecho BC (raio 2), e outra parte é transmitida a um terceiro meio (raio 3).

Gostaríamos de saber a condição de interferência construtiva/destrutiva dos raios 1 e 2 com comprimento de onda no vácuo λ . Vamos considerar o caso de incidência praticamente normal, i.e. $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_3 \approx 0$ e assumir que $n_2 > n_1 = n_3$, e.g. uma película de plástico suspensa no ar. Neste caso, temos que a diferença de caminho entre os raios 1 e 2 é de $2d$. Entretanto, como $n_2 > n_1$ o raio 1 sofre mudança de fase de π na reflexão, ou equivalentemente uma defasagem de $\lambda/2$. Portanto, para que tenhamos interferência construtiva/destrutiva, é preciso

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_2, \quad \text{onde } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Construtiva}) \quad (3.20)$$

$$2d = m\lambda_2, \quad \text{onde } m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Destrutiva}) \quad (3.21)$$

onde $\lambda_2 = \lambda/n_2$. Note que se tivéssemos $n_3 > n_2$, teríamos uma mudança de fase também do raio 2 na sua reflexão em B . Portanto, neste caso, as condições de interferência construtiva/destrutiva se inverteriam com relação ao caso acima.

Exercício: Considere o caso em que θ_1 não é pequeno e as diferenças de caminho ABC do raio 2 e AD do raio 1 devem ser consideradas na condições de interferência.

Por que o filme deve ser "fino"? A luz incidente usualmente vem em pulsos de ondas gerados por processos aleatórios (emissão atômica, etc.). Portanto, para que haja interferência é preciso que um único pulso entre na película e retorne para interferir com ele mesmo, i.e. o raio 1 e 2 devem ter o mesmo pulso de origem; caso contrário não haverá coerência dos raios. É por isso que podemos ver máximos e mínimos em uma bolha de sabão, mas não em uma placa de vidro.

3.4 Difração

Experimento de Young: luz de 2 fendas *pequenas* interferem na tela de observação produzindo um padrão de interferência. O que ocorre no caso de apenas uma fenda, não necessariamente pequena?

Princípio de Huygens: uma frente de onda é um conjunto de fontes pontuais que se combinam para formar a frente de onda em um instante seguinte. Difração: interferência da onda com ela mesma, i.e. luzes de todos os pontos (contínuo) da fenda interferem na tela de observação. O caso de uma fenda dupla pequena corresponde ao limite de apenas 2 pontos interferindo.

Aqui consideraremos apenas a *difração de Fraunhofer*, em que os raios saindo da fenda podem ser aproximados como paralelos, e.g. se a distância da fenda à tela de observação D é grande. O limite de pequenas distâncias corresponderia à *difração de Fresnel*.

Antes de achar o padrão de difração e suas intensidades, podemos mais facilmente encontrar os pontos de mínimo. Considere uma fenda simples de largura a , como na Fig 3.5. Considere a interferência de pares de raios, e.g. raio 1 e raio 2, raio 3 e raio 4, etc. Para todos estes pares de raios a diferença de caminho entre eles é:

$$[1] - [2] = [3] - [4] = \dots = \frac{a}{2} \sin \theta \quad (3.22)$$

Se essa diferença de caminho for igual a $\lambda/2$, todos esses pares se cancelaram em P_1 na tela de observação, e teremos interferência destrutiva neste ponto. Portanto:

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a \sin \theta = \lambda \quad (1^\circ \text{ mínimo})} \quad (3.23)$$

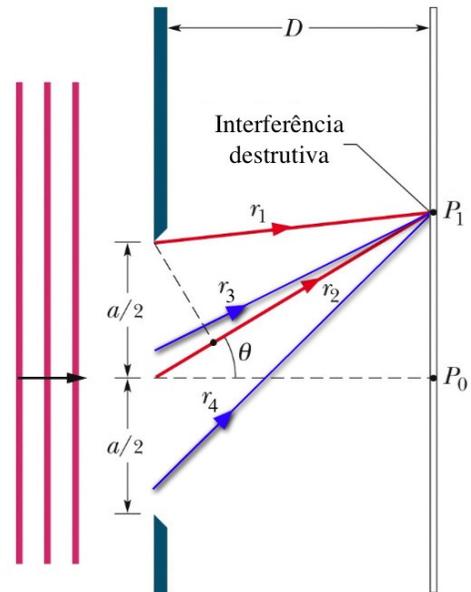


Figura 3.5: Formação do 1º mínimo de difração no ponto P_1 . (Halliday)

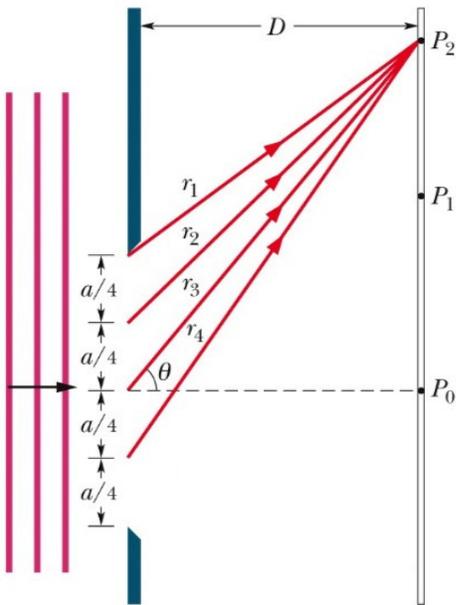


Figura 3.6: Formação do 2º mínimo de difração no ponto P_2 . (Halliday)

A condição acima define o primeiro mínimo. Mínimos sucessivos podem ser obtidos imaginando que exatamente o que aconteceu na fenda de largura a , aconteça com cada uma de suas frações (e.g. cada uma de suas metades se cancela independentemente, etc).

Por exemplo, se dividirmos a fenda em 2 partes, cada uma de largura $a/2$ e repetirmos a análise acima para cada parte, os raios na primeira metade da fenda se cancelam e os raios na segunda metade se cancelam independentemente. A Fig 3.6 mostra essa segunda maneira dos raios se cancelarem no ponto P_2 da tela de observação. Vamos considerar novamente a interferência de pares de raios, e.g. raio 1 e raio 2, raio 2 e raio 3, etc. Para estes pares a diferença de caminho é:

$$[1] - [2] = [2] - [3] = \dots = \frac{a}{4} \sin \theta \quad (3.24)$$

Se essa diferença de caminho for igual a $\lambda/2$, todos os pares da primeira metade da fenda se cancelarão e todos os pares da segunda metade se cancelarão de forma independente. Assim, todos os pares da fenda como um todo se cancelam em P_2 :

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a \sin \theta = 2\lambda \quad (2^\circ \text{ mínimo})} \quad (3.25)$$

Prosseguindo neste raciocínio sucessivamente, temos

$$\boxed{a \sin \theta = m\lambda \quad (m^{\text{th}} \text{ mínimo})} \quad (3.26)$$

Antes de calcular o padrão de difração em um fenda simples, vamos primeiro lembrar do caso da interferência em fenda dupla de largura pequena, como mostrado na Fig 3.7.

Neste caso, tínhamos

$$E(P) = E_1 + E_2,$$

onde $E_1 = v_1 e^{-i\omega t}$, e $v_1 = A e^{ikr_1}$

Mostramos anteriormente que

$$E(P) = ve^{-i\omega t}$$

onde $v = \tilde{v} \left[e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta} + e^{+ik\frac{d}{2}\sin\theta} \right]$

e $\tilde{v} = Ae^{ikR}$

Definindo coordenadas \vec{x} com centro entre as duas fendas, e denotando a coordenada da fenda de cima $x_1 = d/2$ e da fenda de baixo $x_2 = -d/2$, segue que

$$\vec{k} \cdot \vec{x}_1 = |\vec{k}||\vec{x}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = k\frac{d}{2}\sin\theta$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x}_2 = |\vec{k}||\vec{x}_2| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -k\frac{d}{2}\sin\theta$$

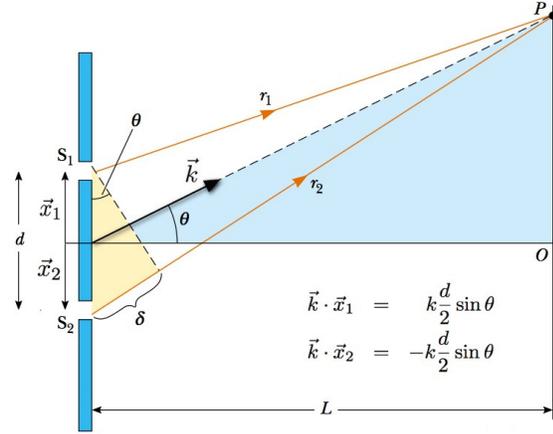


Figura 3.7: Interferência em uma fenda dupla. (Serway)

Portanto, podemos escrever a amplitude do campo no caso de uma fenda dupla como

$$v = \tilde{v}[e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_1} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_2}]$$

$$= \tilde{v} \sum_{j=1}^2 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_j} \quad (3.27)$$

Para obter o padrão de difração, só precisamos generalizar essa expressão para infinitos pontos ao invés de apenas 2. Para N pontos na fenda igualmente espaçados de $\Delta x = a/N$, onde a é o tamanho da fenda teríamos

$$v(\theta) = \tilde{v} \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_j} \quad (3.28)$$

Note que quando $\theta = 0$, temos $\vec{k} \cdot \vec{x}_j = kx_j \sin 0 = 0$ para todo j , e a amplitude é máxima:

$$v(0) = \tilde{v} \sum_{j=1}^N 1 = N\tilde{v} \quad (3.29)$$

Portanto, relativamente a este valor máximo, temos (usando $\Delta x = a/N$):

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_j} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_j} \Delta x \quad (3.30)$$

Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ em que $\Delta x \rightarrow 0$, a soma se torna uma integral

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx \quad (3.31)$$

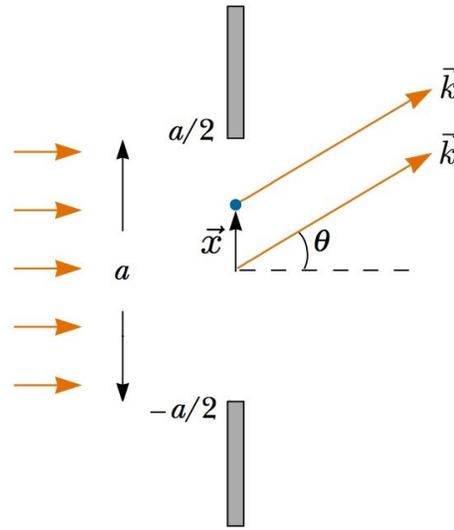


Figura 3.8: Difração em uma fenda simples. Cada ponto \vec{x} no contínuo da fenda contribui para a interferência com fase $\vec{k} \cdot \vec{x}$. (Serway)

que podemos calcular como

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx \sin \theta} dx = \frac{1}{a} \frac{e^{-ikx \sin \theta}}{-ik \sin \theta} \Big|_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{1}{a} \frac{e^{-ik\frac{a}{2} \sin \theta} - e^{ik\frac{a}{2} \sin \theta}}{-ik \sin \theta} = \frac{1}{k\frac{a}{2} \sin \theta} \frac{e^{ik\frac{a}{2} \sin \theta} - e^{-ik\frac{a}{2} \sin \theta}}{2i} = \frac{\sin(k\frac{a}{2} \sin \theta)}{k\frac{a}{2} \sin \theta} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \\ \beta &= ka \sin \theta \end{aligned}$$

Finalmente, como $I = \langle E^2 \rangle = |v|^2$, temos

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{v(\theta)^2}{v(0)^2}$$

ou

$$\boxed{\frac{I(\theta)}{I_0} = \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad \text{onde} \quad \beta = ka \sin \theta \quad (\text{Difração, Fenda Simples})} \quad (3.32)$$

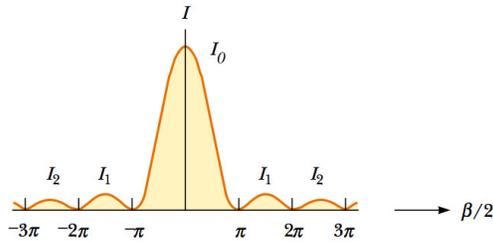


Figura 3.9: Padrão de intensidade na difração em uma fenda simples. (Serway)

Este padrão de interferência está mostrado na Fig 3.9. Note que os mínimos ocorrem quando $\sin(\beta/2) = 0$, ou seja para

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} &= m\pi, \quad m = 1, 2, \dots \\ \rightarrow \frac{ka \sin \theta}{2} &= m\pi, \quad k = 2\pi/\lambda \\ \rightarrow a \sin \theta &= m\lambda \end{aligned}$$

(3.33)

que é exatamente a condição que havíamos encontrado anteriormente. A posição dos máximos pode ser bem aproximada como centrada entre dois mínimos sucessivos. A região do máximo central estendida até o primeiro mínimo contém mais de 90% da intensidade total.

Se considerarmos agora novamente uma fenda dupla, mas com fendas de tamanho a não desprezível, temos que o efeito de interferência das duas fendas se sobrepõe à difração de cada fenda individual. Desta forma, o padrão de interferência/difração será dado por

$$\boxed{\frac{I(\theta)}{I_0} = \cos^2(\delta/2) \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad \text{onde} \quad \delta = kd \sin \theta \quad \text{e} \quad \beta = ka \sin \theta \quad (\text{Fenda Dupla})} \quad (3.34)$$

Neste caso temos mínimos de interferência ($\delta = (m + 1/2)\pi$) e mínimos de difração ($\beta = m\pi$) que se superpõem. Normalmente $d > a$, portanto o espaçamento de mínimos de interferência ($\Delta\theta_{\text{int}} \sim \lambda/d$) são menores que o espaçamento de mínimos de difração ($\Delta\theta_{\text{dif}} \sim \lambda/a$). Assim o padrão de difração acaba servindo como um envelope ao padrão de interferência. Este padrão resultante de interferência/difração está mostrado na Fig 3.10.

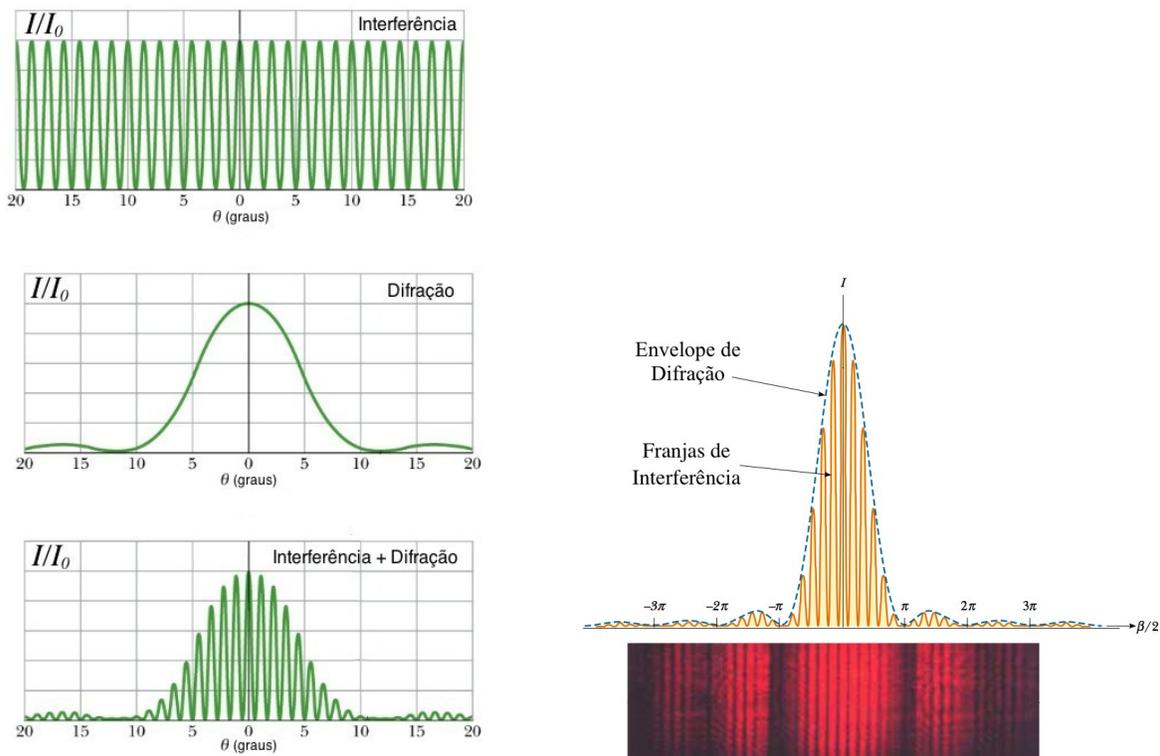


Figura 3.10: Padrão de *Interferência e Difração* das ondas que passam por duas fendas. (Serway)