Apêndice E

Coordenadas Esféricas

Considere a Fig. E.1, que mostra a definição de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) em termos de coordenadas cartesianas (x, y, z) para qualquer ponto no espaço tri-dimensional. As coordenadas angulares θ e ϕ representam a longitude e latitude que caracterizam qualquer ponto em uma esfera de raio r.

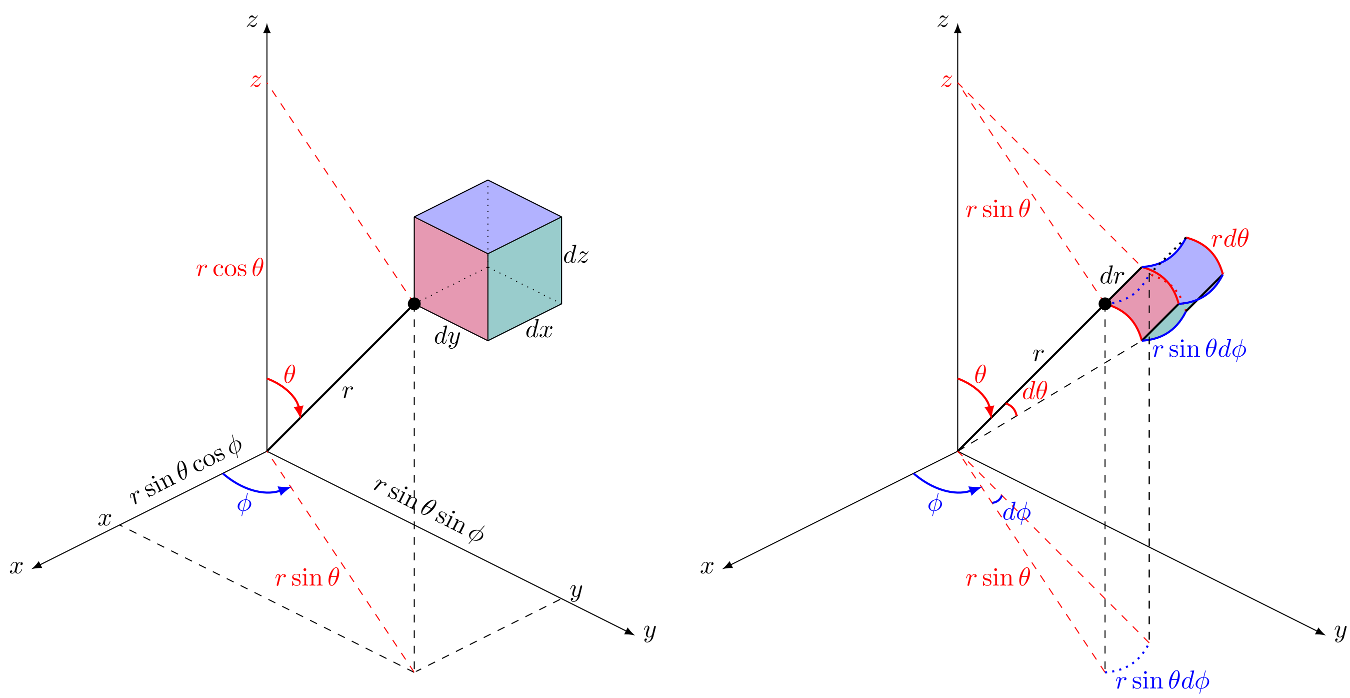

Figura E.1: Definição de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) em termos de coordenadas cartesianas (x, y, z). O elemento de volume é dado por $dV = dxdydz$ em coordenadas cartesianas e $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$ em coordenadas esféricas.

Da figura temos:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{E.1}$$

O elemento de volume em coordenadas cartesianas é

$$dV = dxdydz \tag{E.2}$$

enquanto em coordenadas esféricas ele é

$$dV = (r\sin\theta d\phi)(rd\theta)dr = r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{E.3}$$

Podemos também usar o jacobiano da transformação de coordenadas para obter este resultado. Das Eqs. E.1, temos os diferenciais:

$$\begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\phi dr + r\cos\theta\cos\phi d\theta - r\sin\theta\sin\phi d\phi & \text{(E.4)} \\ dy &= \sin\theta\sin\phi dr + r\cos\theta\sin\phi d\theta + r\sin\theta\cos\phi d\phi & \text{(E.5)} \\ dz &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta & \text{(E.6)} \end{aligned}$$

ou em termos matriciais

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}}_{A=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \tag{E.7}$$

onde a matrix de transformação $A = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}$. O jacobiano ($J = \det A = |A|$) é

$$\begin{aligned} J &= \det A = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| \\ &= (r\cos\theta\cos\phi)(r\sin\theta\cos\phi)(\cos\theta) + (-r\sin\theta\sin\phi)(-r\sin\theta)(\sin\theta\sin\phi) \\ &\quad -(\cos\theta)(r\cos\theta\sin\phi)(-r\sin\theta\sin\phi) - (-r\sin\theta)(r\sin\theta\cos\phi)(\sin\theta\cos\phi) \\ &= r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^3\theta\sin^2\phi \\ &\quad +r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2(\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta) \\ &= r^2\sin\theta & \text{(E.8)} \end{aligned}$$

Assim,

$$dV = dxdydz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| drd\theta d\phi = r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{E.9}$$

Para problemas com simetria esférica, podemos ter uma função que dependa apenas da coordenada radial r, i.e. $f = f(r)$. Neste caso, a integral de volume desta função fica:

$$\begin{aligned} \iiint f(r)dV &= \iiint f(r)r^2\sin\theta drd\theta d\phi = \int_0^r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(r)r^2\sin\theta \\ &= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta}_{=-\cos\theta|_0^\pi=2} \int_0^r f(r)r^2dr \\ &= \int_0^r f(r)\ 4\pi r^2dr & \text{(E.10)} \end{aligned}$$

Ou seja, com simetria esférica o elemento de volume $dV = 4\pi r^2dr$ é simplesmente uma casca esférica de área $4\pi r^2$ e espessura dr.