

Apêndice L

Função de Green

L.1 Função de Green em 3 dimensões

Suponha que uma equação diferencial com um operador diferencial linear $\mathbf{L}$ seja dada por

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x})] = \rho(\vec{x}) \quad (\text{L.1})$$

onde $\rho(\vec{x})$ é uma função conhecida, e $\phi(\vec{x})$ é a função que gostaríamos de achar como solução desta equação diferencial. Note que a Eq. de Poisson é um caso particular para o operador Laplaciano, ou seja $\mathbf{L} = \nabla^2$.

Vamos supor que sabemos a solução da equação no caso em que $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x})$, e vamos denotar essa solução como a função de Green $G(\vec{x})$, ou seja:

$$\mathbf{L}[G(\vec{x})] = \delta(\vec{x}) \quad (\text{L.2})$$

A função de Green pode então ser usada para construir uma solução particular para a Eq. L.1. De fato, das propriedades da função delta, podemos escrever a Eq. L.1 como:

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x})] = \rho(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (\text{L.3})$$

Usando a Eq. L.2, e a propriedade linear do operador $\mathbf{L}$ que atua apenas na variável $\vec{x}$, e não em $\vec{x}'$, temos:

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x})] = \int \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV' = \int \rho(\vec{x}') \mathbf{L}[G(\vec{x} - \vec{x}')] dV' = \mathbf{L} \left[\int \rho(\vec{x}') G(\vec{x} - \vec{x}') dV' \right] \quad (\text{L.4})$$

Segue que os argumentos de $\mathbf{L}$ no primeiro e último termos devem ser iguais, a menos de uma função $F(\vec{x})$ que satisfaz a versão homogênea da equação original, i.e. para a qual $\mathbf{L}[F(\vec{x})] = 0$. Desta forma:

$$\phi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{x}') G(\vec{x} - \vec{x}') dV' + F(\vec{x}) \quad (\text{L.5})$$

L.2 Função de Green em 4 dimensões

Podemos generalizar as expressões em 3 dimensões para o caso em que incluímos o tempo t . Suponha então que o operador diferencial linear agora possa incluir derivadas espaciais e temporais:

$$\mathbf{L}[\phi(\vec{x}, t)] = \rho(\vec{x}, t) \quad (\text{L.6})$$

A Eq. de Ondas é um caso particular para o operador D'Alambertiano, ou seja

$$\mathbf{L} = \square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{L.7})$$

Neste caso a função de Green $G(\vec{x}, t)$ é definida por:

$$\mathbf{L}[G(\vec{x}, t)] = \delta(\vec{x})\delta(t) \quad (\text{L.8})$$

E a solução da equação diferencial fica

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \int dt' \rho(\vec{x}', t') G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') + F(\vec{x}, t) \quad (\text{L.9})$$

onde $\mathbf{L}[F(\vec{x}, t)] = 0$

L.3 Laplaciano

Comparando as Eqs. L.5 e L.5, temos que a função de Green do operador Laplaciano é dada por $G(\vec{x} - \vec{x}') = -1/4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|$, ou similarmente

$$G(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (\text{L.10})$$

Vamos supor que não soubéssemos disto e quiséssemos achar a função de Green diretamente de sua definição, ou seja

$$\nabla^2 G(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) \quad (\text{L.11})$$

L.3.1 Método 1

Primeiro vamos integrar esta equação em uma esfera centrada na origem, e usar o Teorema de Gauss, obtendo:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G dV &= \int_V \delta(\vec{x}) dV \\ \oint_S \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{L.12})$$

Como no lado esquerdo estamos integrando na superfície de uma esfera centrada na origem, temos $d\vec{S} = r^2 d\Omega \hat{r}$. Desta forma, apenas a componente radial de $\vec{\nabla} G$ contribuirá para a integral. Temos:

$$\oint_S \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} = \oint \frac{dG}{dr} \hat{r} \cdot (r^2 d\Omega \hat{r}) = r^2 \oint \frac{dG}{dr} d\Omega \quad (\text{L.13})$$

Note agora que na Eq. L.11, a função $\delta(\vec{x})$ atua apenas na origem $\vec{x} = 0$, e portanto impõe simetria esférica com respeito à origem do lado direito da equação. Assim, para que o lado esquerdo tenha a mesma simetria, é preciso que $G(\vec{x}) = G(r)$, caso contrário as derivadas de ∇^2 atuariam

em θ e ϕ , quebrando a simetria esférica do lado esquerdo. Desta forma dG/dr também é função apenas de r e pode sair da integral no ângulo sólido (em θ e ϕ):

$$\oint_S \vec{\nabla} G \cdot d\vec{S} = r^2 \frac{dG}{dr} \underbrace{\int \int \sin \theta d\theta d\phi}_{=4\pi} = 1 \quad (\text{L.14})$$

Assim,

$$r^2 \frac{dG}{dr} = \frac{1}{4\pi} \quad \rightarrow \quad \frac{dG}{dr} = \frac{1}{4\pi r^2} \quad (\text{L.15})$$

Por fim, integrando, e ignorando a constante de integração, temos:

$$G(\vec{x}) = G(r) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (\text{L.16})$$

L.3.2 Método 2

Uma outra possibilidade é usar Transformadas de Fourier (TF). A transformada de uma função $\phi(\vec{x})$ e sua inversa são dadas por

$$\mathcal{F}[\phi(\vec{x})] = \tilde{\phi}(\vec{k}) = \int d^3x \phi(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{L.17})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\phi}(\vec{k})] = \phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{\phi}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{L.18})$$

Tomando a TF da Eq. L.11, temos

$$-k^2 \tilde{G}(\vec{k}) = 1 \quad \text{ou} \quad \tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{k^2} \quad (\text{L.19})$$

Tomando a TF inversa deste resultado, temos

$$\begin{aligned} G(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{G}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{k^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^\infty dk \, k^2 \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} (2\pi) \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \quad (\text{Tome } u = \cos \theta, \, du = -\sin \theta d\theta) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 du \, e^{ikru} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \underbrace{\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}}_{\frac{2 \sin(kr)}{kr}} \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{kr} = -\frac{1}{2\pi^2 r} \underbrace{\int_0^\infty dy \frac{\sin y}{y}}_{\pi/2} = -\frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad (\text{L.20})$$

L.4 D'Alambertiano

Agora gostaríamos de encontrar a função de Green $G(\vec{x}, t)$ do operador d'Alambertiano $\square^2$:

$$\square^2 G(\vec{x}, t) = \nabla^2 G(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \delta(\vec{x}) \delta(t) \quad (\text{L.21})$$

L.4.1 Método 1

(ver Jackson 6.4)

A Transformada de Fourier (TF) da componente *temporal* de uma função $\phi(\vec{x}, t)$, e sua inversa são dadas por (note que a coordenada espacial $\vec{x}$ não é transformada aqui, veja Método 2 abaixo):

$$\mathcal{F}[\phi(\vec{x}, t)] = \tilde{\phi}(\vec{x}, \omega) = \int dt \phi(\vec{x}, t) e^{-i\omega t}, \quad (\text{L.22})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi(\vec{x}, \omega)] = \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{\phi}(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t}. \quad (\text{L.23})$$

A idéia deste método é considerar a equação original:

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \rho(\vec{x}, t), \quad (\text{L.24})$$

e tomar a TF temporal desta equação para obter:

$$\nabla^2 \tilde{\phi}(\vec{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\phi}(\vec{x}, \omega) = \tilde{\rho}(\vec{x}, \omega). \quad (\text{L.25})$$

Note que a transformada temporal substitui a inconveniente dependência temporal da equação diferencial original, tornando-a um conjunto de equações diferenciais apenas com derivadas espaciais (uma equação para cada valor de frequência ω).

Para cada valor fixo de ω , podemos então buscar a função de Green $G_\omega(\vec{x})$ da Eq. L.25:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G_\omega(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (\text{L.26})$$

Como no lado direito a função δ depende apenas da coordenada $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$ e tem simetria esférica em torno de $\vec{r} = 0$, a função de Green também deve depender apenas de $r = |\vec{r}|$, i.e. $G_\omega(\vec{x}, \vec{x}') = G_\omega(r)$. Em coordenadas esféricas, portanto, o Laplaciano ∇^2 atua apenas na coordenada r :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r G_\omega(r)] + \frac{\omega^2}{c^2} G_\omega(r) = \delta(\vec{r}). \quad (\text{L.27})$$

Em qualquer ponto com $r \neq 0$, a função $\delta(\vec{r})$ se anula, e temos que $r G_\omega(r)$ satisfaz

$$\frac{d^2}{dr^2} [r G_\omega(r)] + \frac{\omega^2}{c^2} [r G_\omega(r)] = 0, \quad (\text{L.28})$$

cujas soluções são dadas por

$$r G_\omega^\pm(r) = A e^{\pm i\omega r/c}. \quad (\text{L.29})$$

Como para $\omega = 0$, devemos recuperar a Função de Green da Eq. de Poisson, temos $A = -1/4\pi$ e

$$G_\omega^\pm(r) = -\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r} \quad (\text{L.30})$$

Desta forma, a solução da Eq. L.25 fica

$$\tilde{\phi}^\pm(\vec{x}, \omega) = \int d^3 x' G_\omega^\pm(\vec{x} - \vec{x}') \tilde{\rho}(\vec{x}', \omega) = - \int d^3 x' \frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r} \int dt' \rho(\vec{x}, t') e^{-i\omega t'} \quad (\text{L.31})$$

Por fim, $\phi(\vec{x}, t)$ é obtido via transformada inversa:

$$\begin{aligned}\phi^\pm(\vec{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \tilde{\phi}^\pm(\vec{x}, \omega) e^{i\omega t} = -\frac{1}{2\pi} \int d\omega \int d^3x' \frac{e^{\pm i\omega r/c}}{4\pi r} \int dt' \rho(\vec{x}, t') e^{-i\omega t'} e^{i\omega t} \\ &= - \int dt' \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t')}{4\pi r} \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(\pm r/c + t - t')}}_{\delta(\pm r/c + t - t')} = \int dt' \int d^3x' \rho(\vec{x}', t') \left[-\frac{\delta(\pm r/c + t - t')}{4\pi r} \right]\end{aligned}$$

Da Eq. L.9, como $\delta(ay) = \delta(y)/a$ e $\delta(-y) = \delta(y)$, identificamos:

$$G^\pm(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{\delta(\pm r/c + t - t')}{4\pi r} = -\frac{c}{4\pi r} \delta(\pm r + c(t - t')) = -\frac{c}{4\pi r} \delta(\mp r - c(t - t')) \quad (\text{L.32})$$

Para a solução $G^{(-)}$, temos

$$G^{(-)}(\vec{x} - \vec{x}', t - t') = -\frac{c}{4\pi r} \delta(r - c(t - t')) = -\frac{c}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(|\vec{x} - \vec{x}'| - c(t - t')). \quad (\text{L.33})$$

L.4.2 Método 2

(ver Jackson 12.11)

Outra forma de obter a função de Green é usar Transformadas de Fourier (TF) em 4 dimensões. Neste caso, transformada de uma função $\phi(\vec{x})$ e sua inversa são dadas por

$$\mathcal{F}[\phi(\vec{x}, t)] = \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \int d^3x \int dt \phi(\vec{x}, t) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} \quad (\text{L.34})$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi(\vec{k}, \omega)] = \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} \quad (\text{L.35})$$

Tomando a TF da Eq. L.21, temos

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = 1 \quad (\text{L.36})$$

ou multiplicando por c^2 :

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{c^2}{\omega^2 - (kc)^2} \quad (\text{L.37})$$

Assim, tomando a TF inversa, temos

$$\begin{aligned}G(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)} \\ &= \frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)}}{\omega^2 - (kc)^2} \\ &= \frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \underbrace{\int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - (kc)^2}}_I\end{aligned} \quad (\text{L.38})$$

Vamos calcular a integral I :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - (kc)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - kc)(\omega + kc)} \quad (\text{L.39})$$

Esta integral tem polos em $w = \pm kc$. Podemos tomar $z = w + i\epsilon$, com $\epsilon > 0$, e considerar a integral no plano complexo, agora com os polos deslocados. Considerando um circuito fechado formado pelo semi-circulo positivo $\mathcal{C}$ de raio R e a reta $\mathcal{R}$ indo de $\omega = -R$ até $\omega = +R$:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C} \cup \mathcal{R}} dz \frac{e^{izt}}{(z - kc)(z + kc)} &= \int_{\mathcal{R}(z=\omega)} dz \frac{e^{izt}}{(z - kc)(z + kc)} + \int_{\mathcal{C}} dz \frac{e^{izt}}{(z - kc)(z + kc)} \\ &= \int_{-R}^R d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - kc)(\omega + kc)} + \int_{\mathcal{C}} dz \frac{e^{izt}}{(z - kc)(z + kc)} \quad (\text{L.40}) \end{aligned}$$

Para a integral em $\mathcal{C}$, temos $izt = i(\omega + i\epsilon)t = i\omega t - \epsilon t$, e assim $e^{izt} = e^{i\omega t} e^{-\epsilon t}$. Como estamos tomando $\epsilon > 0$, é preciso que $t > 0$ para que esta integral convirja mesmo quanto $t \rightarrow \infty$.

De fato, quando $R \rightarrow \infty$, a integral em $\mathcal{C}$ vai a zero, já que seu integrando vai a zero como $1/R^2$. Assim, quando $R \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - kc)(\omega + kc)} = \oint_{\mathcal{C} \cup \mathcal{R}} dz \frac{e^{izt}}{(z - kc)(z + kc)} = 2\pi i \sum \text{Res}(z_+, z_-) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{iz_+ t}}{z_+ + kc} + \frac{e^{iz_- t}}{z_- - kc} \right) \quad (\text{L.41}) \end{aligned}$$

Como $z_+ = kc$ e $z_- = -kc$, temos

$$I = 2\pi i \left(\frac{e^{ikct}}{2kc} + \frac{e^{-ikct}}{-2kc} \right) = -\frac{2\pi}{kc} \left(\frac{e^{ikct} - e^{-ikct}}{2i} \right) = -2\pi \frac{\sin(kct)}{kc} \quad (\text{L.42})$$

Portanto, a função de Green na Eq. L.38, fica:

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, t) &= \frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} (-2\pi) \frac{\sin(kct)}{kc} = -\frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\sin(kct)}{k} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\sin(kct)}{k} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \sin(kct) \int_{-1}^1 du e^{ikru} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \sin(kct) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} \\ &= -\frac{c}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikct} - e^{-ikct}}{2i} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{i} \\ &= \frac{c}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)} - e^{-ik(r-ct)} + e^{-ik(r+ct)} \quad (\text{L.43}) \end{aligned}$$

Notando agora que (com $k' = -k$)

$$\int_0^\infty dk e^{-ik(r \pm ct)} = -\int_0^{-\infty} dk' e^{ik'(r \pm ct)} = \int_{-\infty}^0 dk e^{ik(r \pm ct)} \quad (\text{L.44})$$

temos então

$$\begin{aligned}
 G(\vec{x}, t) &= \frac{c}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(r+ct)} - e^{ik(r-ct)} \\
 &= \frac{c}{4\pi r} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(r+ct)} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(r-ct)} \right] \\
 &= \frac{c}{4\pi r} [\delta(r+ct) - \delta(r-ct)]
 \end{aligned} \tag{L.45}$$

A segunda função delta representa a solução retardada, que é de interesse ao nosso problema. Portanto:

$$G(\vec{x}, t) = -\frac{c}{4\pi r} \delta(r-ct) = -\frac{1}{4\pi r} \delta(r/c - t) \tag{L.46}$$

Portanto a função de Green do D'Alambertiano é parecida com a do Laplaciano, com a diferença de a dependência temporal carregar a função delta que impõe que o tempo de interesse será $t = r/c$.