

Apêndice P

Campo $\vec{B}$ de uma Espira Circular

P.1 Via Potencial Vetor $\vec{A}$

(ver Jackson sec. 5.5)

Considere uma espira circular de raio a com uma corrente constante i . Vamos calcular o campo magnético $\vec{B}$ devido à espira em um ponto P arbitrário a uma distancia r do centro da espira. Vamos usar o fato de que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, e primeiro calcular $\vec{A}$, que no calibre de Lorenz é dado por

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (\text{P.1})$$

Como $\int \vec{j}(\vec{x}') dV' = i d\vec{\ell}$, sendo que $\vec{j} = j_\phi \hat{\phi}$ e $dV' = r'^2 \sin \theta' d\phi' d\theta' dr'$ e $d\vec{\ell} = a d\phi' \hat{\phi}$, temos que

$$\int j_\phi \hat{\phi} r'^2 d\phi' d\cos(\theta') dr' = i a d\phi' \hat{\phi} \quad (\text{P.2})$$

Portanto é necessário que j_ϕ tenha funções δ para impor que $r = a$ e matar as integrais do lado esquerdo, tornando-se o lado direito:

$$j_\phi(r', \theta') = i \frac{\delta(r' - a)}{a} \delta(\cos \theta') \quad (\text{P.3})$$

Como $\vec{j} = j_\phi \hat{\phi}$, temos que $\vec{A} = A_\phi \hat{\phi}$. Note que o problema tem simetria azimutal, já que $\vec{A}$ e $\vec{B}$ não devem depender do valor de ϕ do ponto P . Assim, podemos escolher o ponto P com $\phi = 0$ para simplificar os cálculos. Neste caso, sabemos que $\vec{A}$ deve apontar na direção y . Assim, $\vec{A}(\vec{x}) = A_\phi(r, \theta) \hat{\phi}$. Note no entanto que o versor $\hat{\phi}$ não é fixo, e portanto difere na fonte e no ponto P . No ponto P escolhido, por simetria sabemos que $\vec{A}$ deve apontar na direção y , portanto apenas a componente y de $\vec{j}$ contribui. É conveniente então decompor o versor $\hat{\phi}$ em coordenadas cartesianas, já que nestas coordenadas os versores (i, j, k) são fixos:

$$\hat{\phi} = (\cos(\phi + \pi/2), \sin(\phi + \pi/2), 0) = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (\text{P.4})$$

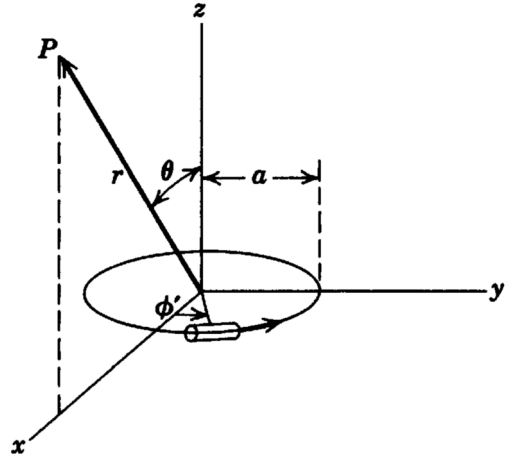


Figura P.1: Campo $\vec{B}$ em um ponto P arbitrário, próximo a uma espira de raio a e corrente i (Jackson).

Assim, a densidade de corrente em coordenadas cartesianas fica:

$$\vec{j} = (-j_\phi \sin \phi', j_\phi \cos \phi', 0) \quad (\text{P.5})$$

Temos então

$$\vec{A} = \int dV' \frac{\mu_0 j_\phi(r', \theta')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} (-\hat{i} \sin \phi' + \hat{j} \cos \phi') \quad (\text{P.6})$$

$$(\text{P.7})$$

Como argumentado acima, sabemos pela simetria que $A_x = 0$, mas vamos verificar explicitamente abaixo. Por outro lado, A_y neste caso corresponde a A_ϕ para um ponto P arbitrário. Temos

$$\vec{x} = (r \sin \theta, 0, r \cos \theta) \quad (\text{P.8})$$

$$\vec{x}' = (r' \cos \phi', r' \sin \phi', 0) \quad (\text{P.9})$$

Portanto

$$\vec{x} - \vec{x}' = (r \sin \theta - r' \cos \phi', -r' \sin \phi', r \cos \theta) \quad (\text{P.10})$$

Sendo α o ângulo entre $\vec{x}$ e $\vec{x}'$, temos das Eqs. P.8 e P.9:

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' \equiv xx' + yy' + zz' = rr' \sin \theta \cos \phi' \equiv |\vec{x}| |\vec{x}'| \cos \alpha = rr' \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \sin \theta \cos \phi' \quad (\text{P.11})$$

Assim, da Lei dos cossenos:

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha \rightarrow |\vec{x} - \vec{x}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi')^{1/2} \quad (\text{P.12})$$

Desta forma, temos

$$\vec{A} = \int dr' d\cos \theta' d\phi' r'^2 \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\delta(r' - a)}{a} \delta(\cos \theta') \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \sin \theta \cos \phi')^{1/2}} (-\hat{i} \sin \phi' + \hat{j} \cos \phi') \quad (\text{P.13})$$

Fazendo as integrais triviais em r' e θ' , temos

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{(-\hat{i} \sin \phi' + \hat{j} \cos \phi')}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2}} \quad (\text{P.14})$$

Pode-se ver que a integral na direção x é nula, enquanto a integral na direção y , que representa a componente A_ϕ em geral, fica:

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\cos \phi'}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2}} \quad (\text{P.15})$$

Para pontos muito afastados da espira, $r \gg a$, temos

$$\begin{aligned} A_\phi(r, \theta) &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\cos \phi'}{(1 + (a/r)^2 - 2(a/r) \sin \theta \cos \phi')^{1/2}} \\ &\approx \frac{\mu_0 i a}{4\pi r} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \left(1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi' + \mathcal{O}(a^2/r^2) + \dots \right) \end{aligned} \quad (\text{P.16})$$

O primeiro termo na integral dá zero, e portanto temos

$$A_\phi(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 i a^2}{4\pi r^2} \sin \theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi' \cos^2 \phi'}_{\pi} \rightarrow A_\phi(r, \theta) \approx \frac{\mu_0 i a^2}{4r^2} \sin \theta \quad (\text{P.17})$$

O campo magnético $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ fica então com as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0 i a^2}{4r^2} \sin^2 \theta \right) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\mu_0 i a^2}{2r^2} \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{\mu_0 i a^2}{2r^3} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{P.18})$$

$$\begin{aligned} B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu_0 i a^2}{4r} \sin \theta \right) = -\frac{1}{r} \left(-\frac{\mu_0 i a^2}{4r^2} \sin \theta \right) \\ &= \frac{\mu_0 i a^2}{4r^3} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{P.19})$$

$$B_\phi = 0 \quad (\text{P.20})$$

Expressando a resposta em termos do momento de dipolo magnético da espira $\mu = iA = i\pi a^2$:

$$B_r = \frac{\mu_0 i a^2 \cos \theta}{2 r^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} (i\pi a^2) \frac{\cos \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{r^3} \cos \theta \quad (\text{P.21})$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 i a^2 \sin \theta}{4 r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (i\pi a^2) \frac{\sin \theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \sin \theta \quad (\text{P.22})$$

O módulo do campo B fica

$$B^2 = B_r^2 + B_\theta^2 = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \right)^2 (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \right)^2 (3 \cos^2 \theta + 1) \quad (\text{P.23})$$

No eixo da espira, $\theta = 0$, $r = z$, $\hat{r} = \hat{z}$, $B_\theta = 0$, e temos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3} \hat{z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3} \quad (\text{P.24})$$

que concorda com o resultado da Eq. 7.14.

No plano da espira, $\theta = \pi/2$, $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\hat{\theta} = -\hat{z}$, $B_r = 0$, e

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{\theta} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (\text{P.25})$$

P.2 Via Biot-Savart

Podemos calcular $\vec{B}$ diretamente via a Lei de Biot-Savart. Definindo $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$, temos

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{R}}{R^3} \quad (\text{P.26})$$

Como $\hat{\phi} = (-\vec{i} \sin \phi' + \vec{j} \cos \phi')$ e $d\vec{\ell} = ad\phi' \hat{\phi}$, temos em coordenadas cartesianas

$$d\vec{\ell} = ad\phi' (-\sin \phi', \cos \phi', 0) \quad (\text{P.27})$$

$$\vec{R} = (r \sin \theta - a \cos \phi', -a \sin \phi', r \cos \theta) \quad (\text{P.28})$$

$$R = (r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{1/2} \quad (\text{P.29})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \times \vec{R} &= ad\phi' (r \cos \theta \cos \phi', r \cos \theta \sin \phi', a \sin^2 \phi' - r \sin \theta \cos \phi' + a \cos^2 \phi') \\ &= ad\phi' (r \cos \theta \cos \phi', r \cos \theta \sin \phi', a - r \sin \theta \cos \phi') \end{aligned} \quad (\text{P.30})$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int d\phi' \frac{r \cos \theta \cos \phi'}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{3/2}} \\ B_y &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int d\phi' \frac{r \cos \theta \sin \phi'}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{3/2}} \\ B_z &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi} \int d\phi' \frac{a - r \sin \theta \cos \phi'}{(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{P.31})$$

Usando a aproximação para $r \gg a$:

$$(r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')^{3/2} \approx r^3 \left(1 - 3 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \phi' + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{r^2}\right) + \dots \right) \quad (\text{P.32})$$

temos

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} r \cos \theta \int d\phi' \cos \phi' [1 + 3 \frac{a}{r} (\sin \theta \cos \phi')] \\ &= \frac{3\mu_0 i a^2}{4\pi r^3} \cos \theta \sin \theta \int d\phi' \cos^2 \phi' = \frac{3\mu_0 i \pi a^2}{4\pi r^3} \cos \theta \sin \theta = \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} \cos \theta \sin \theta \\ B_y &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} r \cos \theta \int d\phi' \sin \phi' [1 + 3 \frac{a}{r} (\sin \theta \cos \phi')] \\ &= \frac{3\mu_0 i a^2}{4\pi r^3} \cos \theta \sin \theta \int d\phi' \sin \phi' \cos \phi' = 0 \\ B_z &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} \int d\phi' (a - r \sin \theta \cos \phi') [1 + 3 \frac{a}{r} (\sin \theta \cos \phi')] \\ &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} \int d\phi' (a - r \sin \theta \cos \phi' + 3 \frac{a^2}{r} \sin \theta \cos \phi' - 3a \sin^2 \theta \cos^2 \phi') \\ &= \frac{\mu_0 i a}{4\pi r^3} [2\pi a - 3\pi a \sin^2 \theta] = \frac{\mu_0 i \pi a^2}{4\pi r^3} [2 - 3 \sin^2 \theta] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned}$$

Da Fig. P.2, podemos relacionar estas componentes de $\vec{B}$ em coordenadas cartesianas com as componentes em coordenadas esféricas via

$$B_r = B_x \sin \theta + B_z \cos \theta, \quad (\text{P.33})$$

$$B_\theta = B_x \cos \theta - B_z \sin \theta, \quad (\text{P.34})$$

de onde temos

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{3\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta \\ &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos \theta (3 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{P.35})$$

e

$$\begin{aligned} B_\theta &= \frac{3\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos^2 \theta \sin \theta - \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \\ &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 3 \cos^2 \theta + 1) \\ &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{P.36})$$

Estas componentes concordam com a solução obtida via $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (Eqs. P.21 e P.22).

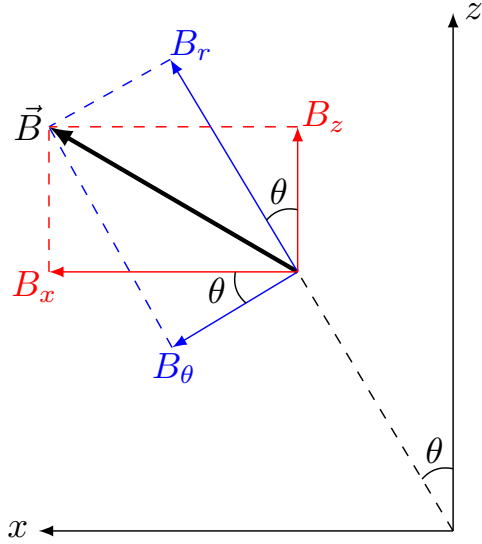


Figura P.2: Componentes de $\vec{B}$ em coordenadas cartesianas (B_x, B_z) e esféricas (B_r, B_θ)

P.3 Comparação com Espira Quadrada

Considere agora uma espira quadrada de lado $2a$ (portanto com $\mu = i4a^2$) localizada no plano xy . Vamos considerar apenas o campo no eixo z da espira. Por simetria, o campo deve apontar na direção z . Cada lado da espira contribui um campo B_{lado} dado pela componente z do campo da Eq. 7.5 (enquanto as componentes no plano xy se anulam em pares):

$$B_{\text{lado}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \frac{2a}{\sqrt{r^2 + a^2}} \sin \theta, \quad (\text{P.37})$$

onde

$$\sin \theta = \frac{a}{z} \quad \text{e} \quad r^2 = a^2 + z^2. \quad (\text{P.38})$$

Assim, os campos dos 4 fios se somam para dar o campo total:

$$B_z = 4B_{\text{lado}} = 4 \frac{\mu_0 i}{4\pi \sqrt{a^2 + z^2}} \frac{2a}{\sqrt{2a^2 + z^2}} \frac{a}{z}. \quad (\text{P.39})$$

Finalmente, para $z \gg a$, temos

$$B_z \approx 4 \frac{\mu_0 i}{4\pi z} \frac{2a}{z} \frac{a}{z} = \frac{\mu_0 i 4a^2}{2\pi z^3} = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}. \quad (\text{P.40})$$

Portanto

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}, \quad (\text{P.41})$$

que é exatamente a mesma resposta para o campo no eixo de uma espira circular.

"From very far away, all loops look the same..."