

Apêndice A

Reflexão, Refração e Polarização

A.1 Leis da Reflexão e da Refração

Vamos agora generalizar o resultado anterior, considerando raios de luz com incidência fazendo um ângulo θ_i com interface que separa os meios 1 e 2, que assumimos serem lineares.

Meio 1: onda incidente e a refletida:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \vec{B}_i e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{B}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{A.2})$$

Meio 2: onda refratada (transmitida):

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) = \vec{B}_t e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{A.4})$$

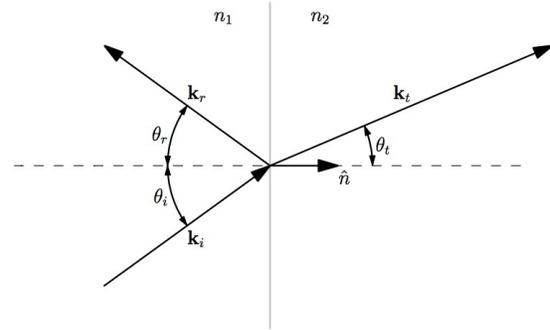


Figura A.1: Reflexão e Refração de um raio de luz para incidência oblíqua. (Griffiths)

Os campos magnéticos são todos perpendiculares aos elétricos e à direção de propagação:

$$\vec{B}_{i,r,t} = \frac{1}{\omega} \vec{k}_{i,r,t} \times \vec{E}_{i,r,t} \quad (\text{A.5})$$

e como $\omega = v_1 k_i = v_1 k_r = v_2 k_t$, temos $k_i = k_r$.

Impondo, por exemplo, a continuidade de B_n , temos a condição:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{n1}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_{n2}(\vec{r}, t) \quad (\text{na interface}) \\ \vec{B}_{ni} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{B}_{nr} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} &= \vec{B}_{nt} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{em } z = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Cancelando as exponenciais temporais, temos

$$\vec{B}_{ni} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + \vec{B}_{nr} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \vec{B}_{nt} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad \text{em } z = 0 \quad (\text{A.7})$$

Como essa igualdade deve valer em qualquer ponto do plano de interface, as exponenciais devem ser todas iguais (Exercício: Mostre.), o que implica:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}, \quad \text{onde } \vec{r} = (x, y, 0) \text{ é um vetor no plano de interface.} \quad (\text{A.8})$$

Esta condição nos dá 3 resultados importantes. Primeiro, podemos escrever essas equações:

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r} = 0, \quad (\vec{k}_r - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = 0 \quad e \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = 0, \quad (\text{A.9})$$

e como $\vec{r} \perp \hat{n}$, segue que

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \parallel \hat{n}, \quad (\vec{k}_r - \vec{k}_t) \parallel \hat{n} \quad e \quad (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \parallel \hat{n} \quad (\text{A.10})$$

Primeira Lei: \vec{k}_i , \vec{k}_r e \vec{k}_t e \hat{n} formam um plano, chamado plano de incidência

Como $\vec{r} \perp \hat{n}$ está no plano da interface, e os ângulos $\theta_{i,r,t}$ são relativos a \hat{n} , a Eq. A.8 implica

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad (\text{A.11})$$

Como $k_i = k_r$, temos então:

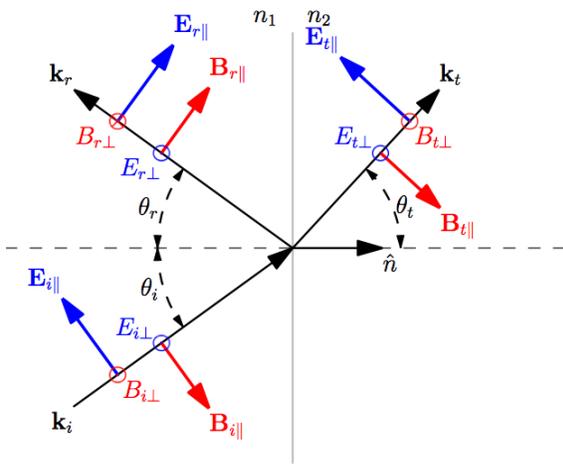
Segunda Lei: $\theta_i = \theta_r$ (Lei da Reflexão).

Além disso, usando como $n_1 = c/v_1 = ck_i/\omega$ e $n_2 = ck_t/\omega$, temos

Terceira Lei: $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ (Lei de Snell).

que reconhecemos como leis básicas da ótica geométrica e são derivadas das Equações de Maxwell !

A.1.1 Condições de Contorno



Os campos eletromagnéticos incidentes podem ter uma direção qualquer perpendicular ao vetor \vec{k}_i . Vamos descrevê-los com eixos paralelos e perpendiculares ao plano de incidência:

- \parallel : paralelo ao plano de incidência
- \perp : perpendicular ao plano de incidência

e já vinhamos usando a convenção

- t : tangente à interface dos meios
- n : normal à interface dos meios

Figura A.2: Reflexão e Refração para incidência oblíqua. Os campos têm componentes \parallel e \perp ao plano de incidência.

Obviamente vetores \perp são t , enquanto vetores \parallel têm ambas componentes t e n . Usando as condições de contorno, temos então

$$\boxed{\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}} :$$

Como

$$\begin{aligned} E_{n1} &= E_{in} + E_{rn} = E_{i\parallel n} + E_{r\parallel n} = E_{i\parallel} \sin \theta_i - E_{r\parallel} \sin \theta_r \\ E_{n2} &= E_{tn} = E_{t\parallel n} = E_{i\parallel} \sin \theta_t \end{aligned}$$

onde não escrevemos as exponencias temporais, pois elas se cancelam por serem iguais, como mostrado na seção anterior. Portanto

$$\epsilon_1 (E_{i\parallel} \sin \theta_i - E_{r\parallel} \sin \theta_r) = \epsilon_2 E_{t\parallel} \sin \theta_t$$

Usando a Lei da Reflexão, temos

$$E_{i\parallel} - E_{r\parallel} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_{t\parallel} \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i}$$

e usando a Lei de Snell, temos

$$E_{i\parallel} - E_{r\parallel} = \frac{n_1 \epsilon_2}{n_2 \epsilon_1} E_{t\parallel} \quad (\text{A.12})$$

$$\boxed{\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}} :$$

As duas componentes tangentes (\parallel e \perp) geram duas condições:

$$\begin{aligned} E_{i\parallel} \cos \theta_i + E_{r\parallel} \cos \theta_r &= E_{t\parallel} \cos \theta_t \\ E_{i\perp} + E_{r\perp} &= E_{t\perp} \end{aligned}$$

ou, usando a Lei da Reflexão:

$$E_{i\parallel} + E_{r\parallel} = E_{t\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad (\text{A.13})$$

$$E_{i\perp} + E_{r\perp} = E_{t\perp} \quad (\text{A.14})$$

$$\boxed{B_{n1} = B_{n2}} :$$

$$B_{i\parallel} \sin \theta_i + B_{r\parallel} \sin \theta_r = B_{t\parallel} \sin \theta_t$$

ou

$$B_{i\parallel} + B_{r\parallel} = \frac{n_1}{n_2} B_{t\parallel} \quad (\text{A.15})$$

e finalmente

$$\boxed{\vec{B}_{t1}/\mu_1 = \vec{B}_{t2}/\mu_2} :$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1}(B_{i\parallel} \cos \theta_i - B_{r\parallel} \cos \theta_r) &= \frac{1}{\mu_2} B_{t\parallel} \cos \theta_t \\ \frac{1}{\mu_1}(B_{i\perp} - B_{r\perp}) &= \frac{1}{\mu_2} B_{t\perp} \end{aligned}$$

ou

$$B_{i\parallel} - B_{r\parallel} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{t\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad (\text{A.16})$$

$$B_{i\perp} - B_{r\perp} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{t\perp} \quad (\text{A.17})$$

Como $B = E/v$ e $\vec{B} \perp \vec{E}$, temos para cada uma das 3 ondas

$$B_{\parallel} = \frac{n}{c} E_{\perp} \quad (\text{A.18})$$

$$B_{\perp} = \frac{n}{c} E_{\parallel} \quad (\text{A.19})$$

Portanto, só precisamos resolver para, e.g. E_{\parallel} e E_{\perp} , e B correspondentes estarão determinados. Definimos (usando $\epsilon_1 = 1/(\mu_1 v_1^2)$):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \\ \beta &= \frac{n_1 \epsilon_2}{n_2 \epsilon_1} = \frac{v_2 \epsilon_2}{v_1 \epsilon_1} = \frac{v_2 \mu_1 v_1^2}{v_1 \mu_2 v_2^2} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Para E_{\parallel} , temos

$$\begin{aligned} \alpha E_{t\parallel} - E_{r\parallel} &= E_{i\parallel} \\ \beta E_{t\parallel} + E_{r\parallel} &= E_{i\parallel} \end{aligned}$$

que podemos resolver:

$$(\alpha + \beta)E_{t\parallel} = 2E_{i\parallel} \rightarrow \boxed{E_{t\parallel} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{i\parallel}} \quad (\text{A.21})$$

e

$$E_{r\parallel} = \alpha E_{t\parallel} - E_{i\parallel} = \frac{2\alpha}{\alpha + \beta} E_{i\parallel} - E_{i\parallel} \rightarrow \boxed{E_{r\parallel} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{i\parallel}} \quad (\text{A.22})$$

Já para E_{\perp} , temos

$$E_{t\perp} - E_{r\perp} = E_{i\perp} \quad (\text{A.23})$$

e

$$\begin{aligned} B_{i\parallel} - B_{r\parallel} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{t\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \\ \frac{E_{i\perp}}{v_1} - \frac{E_{r\perp}}{v_1} &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{E_{t\perp}}{v_2} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad \rightarrow \quad E_{i\perp} - E_{r\perp} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_{t\perp} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Temos, então, o sistema

$$E_{t\perp} - E_{r\perp} = E_{i\perp} \quad (\text{A.25})$$

$$\alpha\beta E_{t\perp} + E_{r\perp} = E_{i\perp} \quad (\text{A.26})$$

e, portanto,

$$(1 + \alpha\beta)E_{t\perp} = 2E_{i\perp} \rightarrow \boxed{E_{t\perp} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_{i\perp}} \quad (\text{A.27})$$

e

$$E_{r\perp} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} E_{i\perp} - E_{i\perp} \rightarrow \boxed{E_{r\perp} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} E_{i\perp}} \quad (\text{A.28})$$

A.1.2 Refletividade e Transmissividade

Podemos definir amplitudes de reflexão r e transmissão t para as componentes \parallel e \perp dos campos:

$$r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \quad t_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{2}{\alpha + \beta} \quad (\text{A.29})$$

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \quad t_{\perp} = \frac{E_{t\perp}}{E_{i\perp}} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} \quad (\text{A.30})$$

A componente do fluxo normal à interface é $\vec{S} \cdot \hat{n}$, e a intensidade (valor médio do fluxo) fica

$$I_i = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_i^2 \cos \theta_i \quad (\text{A.31})$$

$$I_r = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_r^2 \cos \theta_r \quad (\text{A.32})$$

$$I_t = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_t^2 \cos \theta_t \quad (\text{A.33})$$

A refletividade R e a transmissividade T são definidas como

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r^2}{E_i^2} = r^2 \quad (\text{A.34})$$

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\epsilon_2 v_2 \cos \theta_t}{\epsilon_1 v_1 \cos \theta_i} \frac{E_t^2}{E_i^2} = \alpha \beta t^2 \quad (\text{A.35})$$

Note que temos:

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} + \alpha\beta \frac{4}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2} = 1 \quad (\text{A.36})$$

$$R_{\perp} + T_{\perp} = \frac{1 + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} + \alpha\beta \frac{4}{(1 + \alpha\beta)^2} = \frac{(1 + \alpha\beta)^2}{(1 + \alpha\beta)^2} = 1 \quad (\text{A.37})$$

A.1.3 Reflexão Total

Pela lei de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{temos} \quad \boxed{n_1 > n_2 \rightarrow \theta_1 < \theta_2}, \quad (\text{A.38})$$

i.e. o ângulo feito com a normal é menor no meio de maior índice de refração e vice-versa. Considere a Fig. A.3, em que $n_1 > n__2$ e o raio se propaga de 1 para 2:

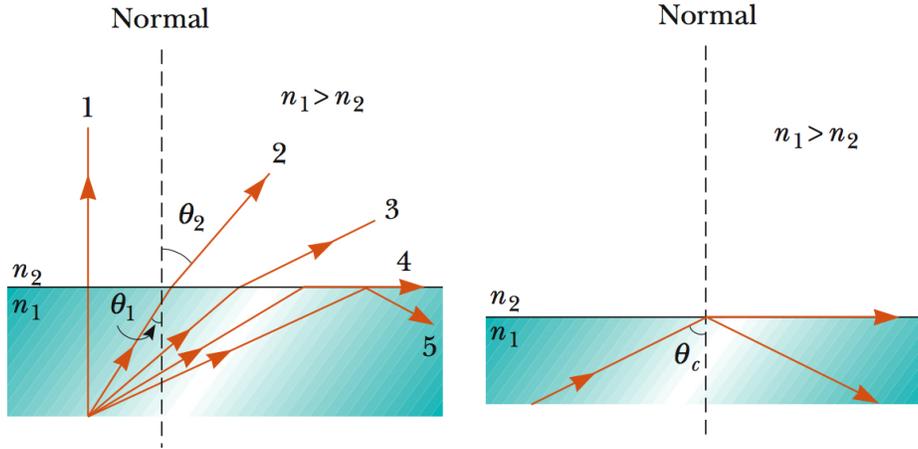


Figura A.3: Reflexão total da luz ao passar de um meio com índice de refração n_1 para um meio com índice de refração $n_2 < n_1$. Quando $\theta_1 \geq \theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)$, a luz é totalmente refletida no meio n_1 . (Serway)

Para $\theta_1 = 0$ a lei de Snell dá $\sin \theta_2 = 0 \rightarrow \theta_2 = 0$, i.e. incidência normal produz refração normal. À medida que θ_1 cresce, θ_2 cresce mais rápido e, para algum valor de θ_1 , teremos $\theta_2 = \pi/2$, i.e. o raio refratado tangencia a interface. Neste caso, não há refração, i.e. o raio é todo refletido de volta ao meio 1. Pela lei de Snell, temos:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \rightarrow \sin \theta_1 = \boxed{\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}} \quad (\text{A.39})$$

onde θ_c é um ângulo crítico tal que para $\theta_1 > \theta_c$, temos *reflexão total*. Note que para $\theta_1 = \theta_c$, temos $\theta_t = \pi/2 \rightarrow \alpha = 0$. Portanto $R_{\parallel} = R_{\perp} = 1$ e $T_{\parallel} = T_{\perp} = 0$, como esperado.

Isso quer dizer que o campo transmitido é zero? Não, apenas que a energia média transmitida é nula. Vamos ver o que acontece com o campo. Para incidência acima do ângulo crítico, temos

$$\theta_i > \theta_c \rightarrow \sin \theta_i > \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \boxed{\sin \theta_i > \frac{n_2}{n_1}} \quad (\text{A.40})$$

Note que $\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1$, o que não faz sentido! Lembre que

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{t} = 0 \rightarrow (k_t)_t = (k_i)_t = k_i \sin \theta_i, \quad \text{onde } \vec{t} \text{ é um vetor na interface.} \quad (\text{A.41})$$

Como $n_1 = c/v_1 = ck_i/\omega$, temos

$$(k_t)_t = (k_i)_t = \frac{n_1 \omega}{c} \sin \theta_i \quad (\text{A.42})$$

Vamos decompor \vec{k}_t em componentes paralela e normal à interface:

$$\vec{k}_t = (k_t)_t \hat{t} + (k_t)_n \hat{n} \quad (\text{A.43})$$

Resta saber quem é $(k_t)_n$. Usando a relação de dispersão $n_2 = c/v_2 = ck_t/\omega$, temos:

$$k_t^2 = \vec{k}_t \cdot \vec{k}_t = (k_t)_t^2 + (k_t)_n^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \quad (\text{A.44})$$

Portanto,

$$(k_t)_n^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - (k_t)_t^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta_i = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i \right) \quad (\text{A.45})$$

Mas, pela Eq. A.40, o termo entre parênteses é < 0 . Portanto $(k_t)_n$ é imaginário:

$$(k_t)_n = i \frac{n_2 \omega}{c} \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1} = ik_I \quad (\text{imaginário}) \quad (\text{A.46})$$

$$(k_t)_t = \frac{n_1 \omega}{c} \sin \theta_i = k_R \quad (\text{real}) \quad (\text{A.47})$$

e

$$\vec{k}_t = k_R \hat{t} + ik_I \hat{n} \quad (\text{A.48})$$

Portanto, decompondo o vetor posição $\vec{r} = y\hat{t} + z\hat{n}$, temos:

$$i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t) = i(k_R y + ik_I z - \omega t) = -k_I z + i(k_R y - \omega t) \quad (\text{A.49})$$

e assim o campo elétrico no meio 2 fica:

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_t e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\vec{E}_t e^{-k_I z}) e^{i(k_R y - \omega t)} \quad (\text{A.50})$$

i.e. a onda se propaga na direção \hat{t} , mas a amplitude da onda decai exponencialmente à medida que nos afastamos da interface: *onda evanescente*.

A.1.4 Ângulo de Brewster

Na incidência oblíqua com campo incidente $\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp}$ tendo componentes paralelas e perpendiculares ao plano de incidência, encontramos que:

$$r_{\parallel} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \approx \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} \quad (\text{A.51})$$

onde usamos a aproximação $\mu_1 \approx \mu_2$, tipicamente válida para a maioria dos meios. Portanto:

$$\alpha = \beta \rightarrow r_{\parallel} = 0 \quad (\text{A.52})$$

i.e. não há luz refletida \parallel ao plano de incidência, ou seja toda luz refletida é \perp ao plano de incidência. O ângulo de incidência em que isso ocorre é chamado ângulo de Brewster $\theta_i = \theta_B$. A condição de $r_{\parallel} = 0$ se traduz em:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta &\rightarrow \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_B} = \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_t} \\ &\rightarrow \sin \theta_t \cos \theta_t = \sin \theta_B \cos \theta_B \\ &\rightarrow \sin 2\theta_t = \sin 2\theta_B \quad (\text{mas } \theta_t \neq \theta_B) \\ &\rightarrow 2\theta_t = \pi - 2\theta_B \\ &\rightarrow \boxed{\theta_t + \theta_B = \frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Portanto, o raio refratado é perpendicular ao raio refletido. Outra maneira de expressar essa condição é escrever:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_B} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_t}}{\cos \theta_i} = \frac{\sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_B}}{\cos \theta_B} = \beta \\ \rightarrow 1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_B &= \beta^2 \cos^2 \theta_B = \beta^2 (1 - \sin^2 \theta_B) \\ \rightarrow \sin^2 \theta_B \left(\beta^2 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) &= \beta^2 - 1 \\ \rightarrow \sin^2 \theta_B &= \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

Como $\beta \approx n_2/n_1$, temos

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(1/\beta)^2 - \beta^2} = \frac{\beta^2(1 - \beta^2)}{1 - \beta^4} = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$$

ou seja

$$\sin \theta_B = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \rightarrow \tan \theta_B = \beta \quad \rightarrow \quad \boxed{\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}} \quad (\text{A.54})$$

Como consequência, no ângulo de Brewster, temos

$$R_{\parallel} = 0 \quad \text{e} \quad T_{\parallel} = 1 \quad (\text{A.55})$$

$$R_{\perp} = \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2 \quad \text{e} \quad T_{\perp} = \frac{4n_1^2 n_2^2}{(n_1^2 + n_2^2)^2} \quad (\text{A.56})$$

Para $n_1 = 4/3n_2$ (ar/água), $R_{\perp} = (7/25)^2 \approx 8\%$ e $T_{\perp} = (24/25)^2 \approx 92\%$, ou seja, de qualquer forma, pouca luz é refletida.

A.1.5 Dispersão

O fenômeno de dispersão da luz resulta do fato de que luzes de diferentes frequências têm índices de refração diferentes e, portanto, refratam de maneira distinta. Se um raio de luz branca no vácuo ($n_1 = 1$) incide a uma ângulo θ_i em um prisma com n_2 , temos

$$n_1 \sin \theta_i = n_2^{\text{azul}} \sin \theta_2^{\text{azul}} = n_2^{\text{vermelho}} \sin \theta_2^{\text{vermelho}} \quad (\text{A.57})$$

Normalmente, n cresce com a frequência ν , e.g. $n^{\text{azul}} > n^{\text{vermelho}}$ e, portanto

$$n^{\text{azul}} > n^{\text{vermelho}} \rightarrow \theta_2^{\text{azul}} < \theta_2^{\text{vermelho}} \quad (\text{A.58})$$

i.e. a luz azul refrata mais do que a vermelha (fica mais próxima da normal).

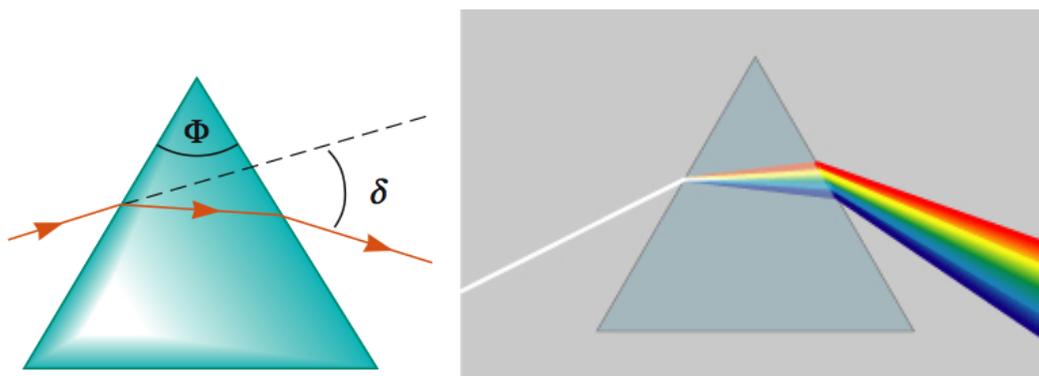


Figura A.4: Dispersão da luz em um prisma. Ondas de diferentes comprimentos de onda refratam de forma diferente. Como $n_{\text{azul}} > n_{\text{vermelho}}$, pela lei de Snell $\theta_t^{\text{azul}} < \theta_t^{\text{vermelho}}$, i.e. a luz azul refrata mais que a vermelha no mesmo meio. (Serway)

A.2 Princípio de Huygens

Uma *frente de onda* é a superfície de pontos com mesma fase da onda (e.g. mesmo valor de E). Ela é perpendicular aos raios de luz, que apontam na direção de propagação da onda.

O Princípio de Huygens diz que *cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma fonte puntiforme, gerando ondas esféricas secundárias, com velocidade da onda no meio. A frente de onda em um instante posterior é a envoltória (obtida somando) de todas estas ondas esféricas secundárias.*

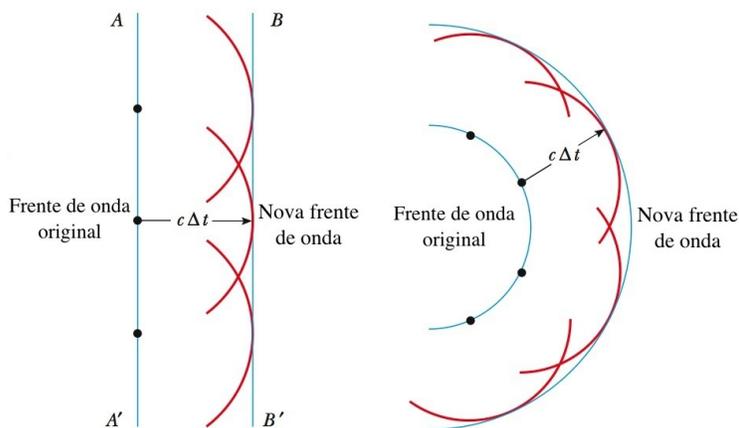


Figura A.5: Princípio de Huygens. (Serway)

Usando o Princípio de Huygens, podemos obter as Leis da Reflexão e de Snell.

A.2.1 Reflexão e Refração

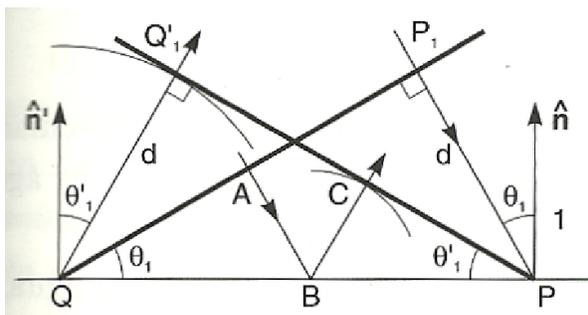


Figura A.6: Lei da reflexão da luz ($\theta_1 = \theta'_1$) via o Princípio de Huygens. (Nussenzveig)

No caso da reflexão, considere a Fig. A.6. Seja QP_1 a frente de onda incidente. Note que θ_1 é o ângulo entre QP_1 e a interface e também o raio P_1P e \hat{n} .

Quando P_1 atinge a interface em P , a onda secundária de Q chega a a Q'_1 ; portanto $P_1P = Q'_1Q = d$ e PQ'_1 é a frente de onda refletida.

Os triângulos QP_1P e PQ'_1Q são retângulos e iguais. Portanto $\theta_1 = \theta'_1$.

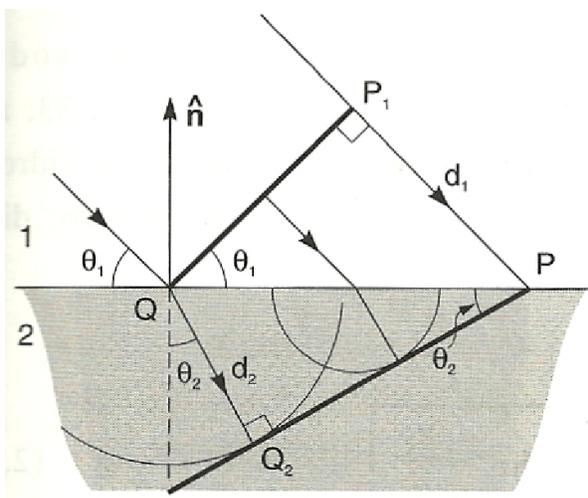


Figura A.7: Lei de Snell ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) via o Princípio de Huygens. (Nussenzveig)

No caso da refração, considere a Fig. A.7. Novamente, QP_1 é a frente de onda incidente. Quando P_1 atinge a interface em P , a onda secundária de Q chega a a Q_2 ; portanto o tempo para que isso ocorra é:

$$t = \frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} \quad (\text{A.59})$$

Mas pela figura

$$d_1 = QP \sin \theta_1 \text{ e } d_2 = QP \sin \theta_2 \quad (\text{A.60})$$

Portanto

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \times c \quad (\text{A.61})$$

$$\rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{A.62})$$

A.3 Princípio de Fermat

O Princípio de Fermat diz que *a luz sempre percorre o caminho que permite ir de um ponto a outro no tempo mínimo*.

Essa idéia de minimizar algo, neste caso, o tempo de propagação, é recorrente na Física.

Esse princípio também leva às leis de reflexão e refração.

A.3.1 Reflexão e Refração

No caso da reflexão, considere a Fig. A.8. Partindo do ponto P_1 , qual deve ser o ponto P em que a luz deve refletir para atingir o ponto P'_1 ?

Basta considerar o ponto \bar{P}_1 simétrico de P_1 com relação à interface. Vemos que

$$P_1QP'_1 = \bar{P}_1QP'_1 \quad (\text{A.63})$$

para um ponto de reflexão Q genérico. Como a luz refletida está sempre no mesmo meio e com a mesma velocidade, tempo mínimo implica distância mínima. E como a distância mínima entre dois pontos é uma reta, vemos que o caminho $P_1PP'_1$ deve ser o tomado pela luz. Geometricamente, isso implica que $\theta_r = \theta_i = \theta_1$. Reflexão em qualquer outro ponto, e.g. Q , tomaria um tempo maior.

No caso da refração, considere a Fig B.4. Partindo do ponto P_1 , qual deve ser o ponto P em que a luz deve refratar para atingir o ponto P_2 ? Agora a velocidade muda de um meio para o outro, o que torna o problema não trivial. Ou seja, a resposta não é simplesmente a reta que conecta P_1 e P_2 , pois para chegar no tempo mínimo, a luz tenderá a percorrer uma distância maior no meio de maior velocidade.

O tempo $t(x)$ total viajado pela luz para ir de P_1 até P_2 em função da distância x (que devemos determinar) é (tempo=distância/velocidade):

$$\begin{aligned} t(x) &= t_1 + t_2 = \frac{P_1P}{v_1} + \frac{PP_2}{v_2} \\ &= \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}}{v_2} \end{aligned}$$

O tempo mínimo ocorre para x tal que:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dt}{dx} &= \frac{x}{v_1\sqrt{d_1^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{v_2\sqrt{d_2^2 + (d-x)^2}} \\ &= \frac{1}{v_1} \frac{x}{P_1P} - \frac{1}{v_2} \frac{(d-x)}{PP_2} \\ &= \frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} \end{aligned}$$

Multiplicando a equação por c e usando a definição $n = c/v$, obtemos a lei de Snell:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{A.64})$$

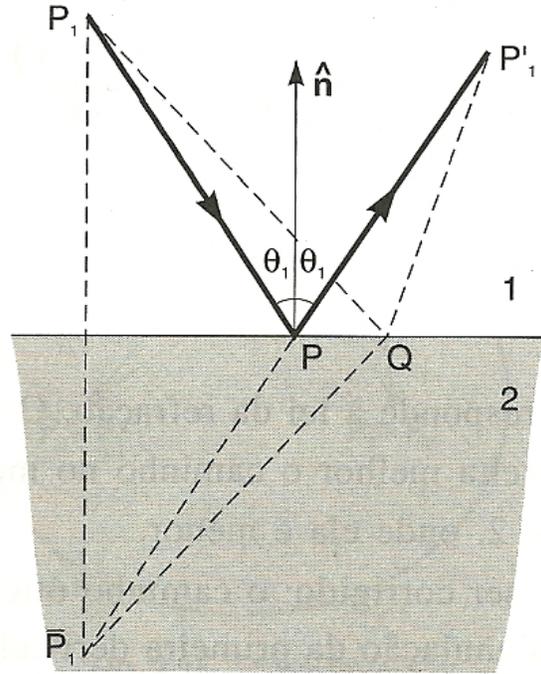


Figura A.8: Lei da reflexão da luz ($\theta_1 = \theta'_1$) via o Princípio de Fermat. (Nussenzveig)

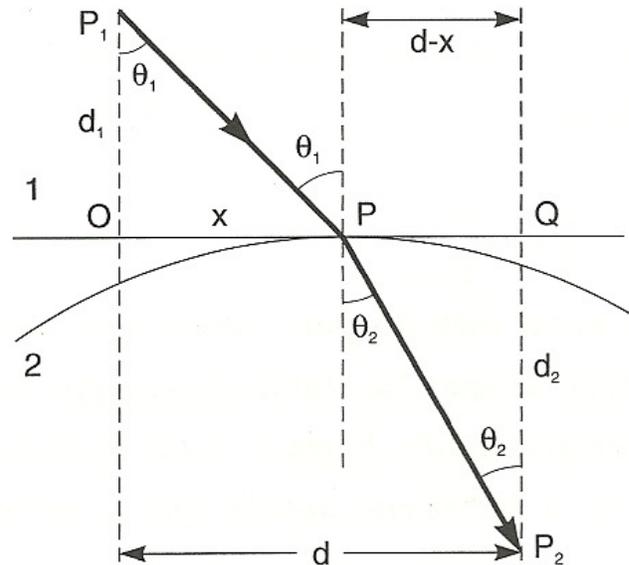


Figura A.9: Lei de Snell ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$) via o Princípio de Fermat. (Nussenzveig)

A.4 Polarização

A.4.1 Ondas Planas Monocromáticas

Até agora consideramos quase sempre o caso em que um dos campos coincide com os eixos x e y , e.g. $\vec{E} = E_x \hat{x}$. Mas \vec{E} se propagando na direção z pode ter componentes gerais no plano xy :

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} \quad (\text{A.65})$$

E assim:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} \hat{z} \times \vec{E} = \frac{1}{v} \hat{z} \times (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) = \frac{1}{v} (-E_y \hat{x} + E_x \hat{y}) \quad (\text{A.66})$$

Portanto

$$B_x = -\frac{E_y}{v} \quad \text{e} \quad B_y = \frac{E_x}{v} \quad (\text{A.67})$$

Para uma onda plana monocromática mais geral, temos:

$$E_x = a e^{i(kz - \omega t)} = v B_y \quad (\text{A.68})$$

$$E_y = b e^{i\delta} e^{i(kz - \omega t)} = -v B_x \quad (\text{A.69})$$

Note que, em princípio, pode haver uma diferença de fase δ entre as componentes x e y dos campos. Tomando a parte real, temos

$$E_x = a \cos \Phi \quad \text{onde} \quad \Phi = kz - \omega t \quad (\text{A.70})$$

$$E_y = b \cos(\Phi + \delta) \quad (\text{A.71})$$

Em geral, \vec{E} faz uma curva no plano $z = 0$ à medida que oscila e se propaga. Para encontrar essa curva, vamos definir uma relação entre E_x e E_y eliminando Φ , i.e. a parte temporal:

$$\frac{E_y}{b} = \cos(\Phi + \delta) = \cos \Phi \cos \delta - \sin \Phi \sin \delta \quad (\text{A.72})$$

$$\frac{E_x}{a} = \cos \Phi \quad \rightarrow \quad \sin \Phi = \sqrt{1 - \cos^2 \Phi} \quad \rightarrow \quad \sin \Phi = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2} \quad (\text{A.73})$$

Portanto

$$\frac{E_y}{b} - \frac{E_x}{a} \cos \delta = \cos \Phi \cos \delta - \sin \Phi \sin \delta - \cos \Phi \cos \delta = -\sin \delta \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2} \quad (\text{A.74})$$

Elevando ao quadrado:

$$\left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a}\frac{E_y}{b}\cos\delta + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 \cos^2\delta = \sin^2\delta \left(1 - \left(\frac{E_x}{a}\right)^2\right) \quad (\text{A.75})$$

que implica

$$\boxed{\left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a}\frac{E_y}{b}\cos\delta + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = \sin^2\delta} \quad (\text{A.76})$$

Esta é a equação geral de uma elipse no plano xy . Portanto a onda monocromática mais geral tem *polarização elíptica*.

A.4.2 Polarização Linear

Para $\delta = 0$ ($\cos \delta = 1, \sin \delta = 0$), i.e. os campos sem defasagem, temos

$$\left(\frac{E_y}{b}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a}\frac{E_y}{b} + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = 0 \rightarrow \left(\frac{E_x}{a} - \frac{E_y}{b}\right)^2 = 0 \quad (\text{A.77})$$

Portanto

$$\boxed{\frac{E_y}{E_x} = \frac{b}{a}} \quad (\text{Polarização Linear}) \quad (\text{A.78})$$

A.4.3 Polarização circular

Para $a = b$ e $\delta = \pi/2$ ($\cos \delta = 0, \sin \delta = 1$), temos

$$\left(\frac{E_y}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = 1 \quad (\text{A.79})$$

Portanto

$$\boxed{E_y^2 + E_x^2 = a^2} \quad (\text{Polarização Circular}) \quad (\text{A.80})$$

A.4.4 Polarização elíptica

Para $a \neq b$ e $\delta = \pi/2$, os eixos da elipse coincidem com os eixos x e y :

$$\left(\frac{E_y}{b}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 = 1 \quad (\text{Polarização Elíptica}) \quad (\text{A.81})$$

A.4.5 Luz não-polarizada

Em geral, a luz resulta de um processo de emissão. Normalmente, esse processo é aleatório no espaço e no tempo, e dá origem a uma onda em que as componentes dos campos não tem uma polarização definida. Neste caso dizemos que a luz é não-polarizada.

Como Polarizar?

Se temos luz não-polarizada, como podemos obter luz com uma certa polarização?

1) Reflexão: Lembre que para $\theta_i = \theta_B$, temos $r_{\parallel} = 0$. Neste caso, a luz refletida tem componente apenas na direção \perp ao plano de incidência: polarização linear.

2) Polarizador: Algumas substâncias têm moléculas alinhadas que absorvem a luz em uma direção, permitindo passagem na direção \perp .

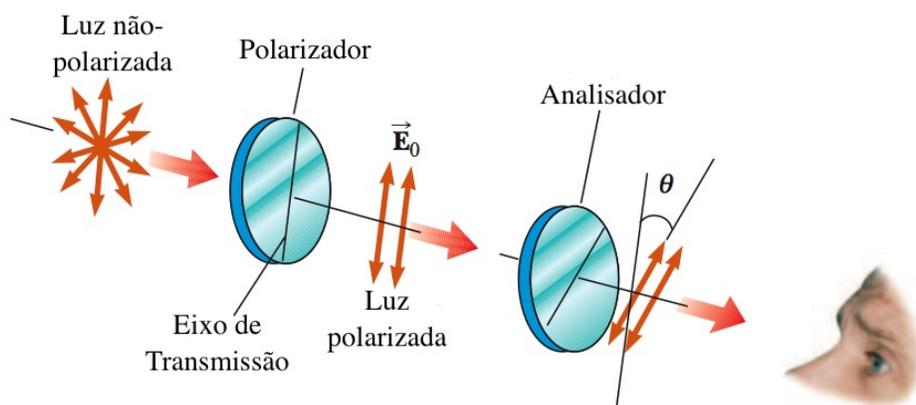


Figura A.10: Lei de Malus. Após ser polarizada no polarizador, a luz incide sobre o analisador fazendo um ângulo θ com o eixo de transmissão. Somente a componente $E = E_0 \cos \theta$ atravessa o analisador e portanto a intensidade transmitida fica $I \propto E^2 = I_0^2 \cos^2 \theta$. (Serway)

Lei de Malus

Suponha que façamos luz não-polarizada incidir sobre um polarizador, como na Fig. B.1. Somente a componente paralela ao polarizador consegue atravessá-lo, e o campo transmitido E_0 é portanto linearmente polarizado.

Se fizermos o campo polarizado incidir sobre um segundo polarizador (analisador), cujo eixo de transmissão faz um ângulo θ com o primeiro polarizador, temos que somente a componente $E = E_0 \cos \theta$ será transmitida.

Desta forma, como a intensidade é $I \propto E^2$, temos que a intensidade I transmitida pelo analisador será dada em termos da intensidade $I_0 \propto E_0^2$ que nele incide por

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (\text{Lei de Malus}) \quad (\text{A.82})$$