

Apêndice B

Imagens por Espelhos e Lentes

B.1 Objetos e Imagens

- Para "ver" um objeto, sua luz deve ser direcionada à retina, onde se forma a imagem.

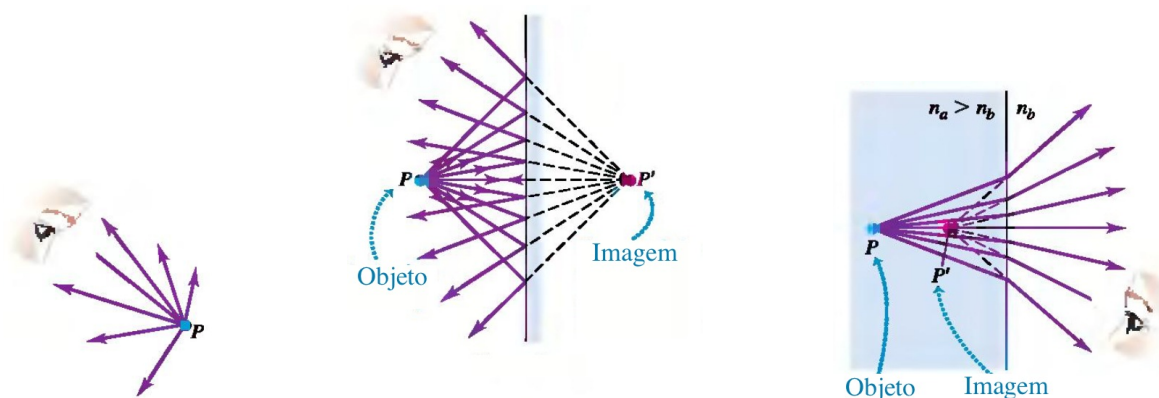


Figura B.1: Podemos ver um objeto olhando para ele ou para a sua imagem refletida/refratada. (Young)

- O processo é idêntico mesmo se a luz não vem de fato do objeto; e.g. a luz refletida por um espelho ou a luz refratada por uma lente.
- Uma imagem se forma quando raios de luz vem ou "parecem vir" de algum ponto após interagir com (refletir em ou refratar de) um sistema ótico (espelho ou lente).
- Neste contexto, podemos definir dois tipos de objeto e imagem:
 - **Imagem real:** Formada em um anteparo/superfície. Não depende do observador para existir. Os raios de luz convergem na imagem.
 - **Imagem virtual:** Formada pela projeção de raios de luz. Depende do observador para existir. A imagem se localiza no ponto de onde os raios projetados parecem divergir.
 - **Objeto real:** A luz do objeto incide sobre o sistema ótico de forma divergente. Esta é a situação usual, e.g. um objeto em frente a um espelho.
 - **Objeto virtual:** A luz incide sobre o sistema ótico de forma convergente. O objeto se localiza no ponto onde os raios convergiriam se não existisse o sistema ótico. Uma imagem real de um sistema pode servir de objeto virtual a um segundo sistema.

B.2 Espelho Plano

Considere um objeto pontual O e sua imagem I formada por um espelho plano, bem como um objeto extenso e sua imagem, como mostrados na Fig. B.2

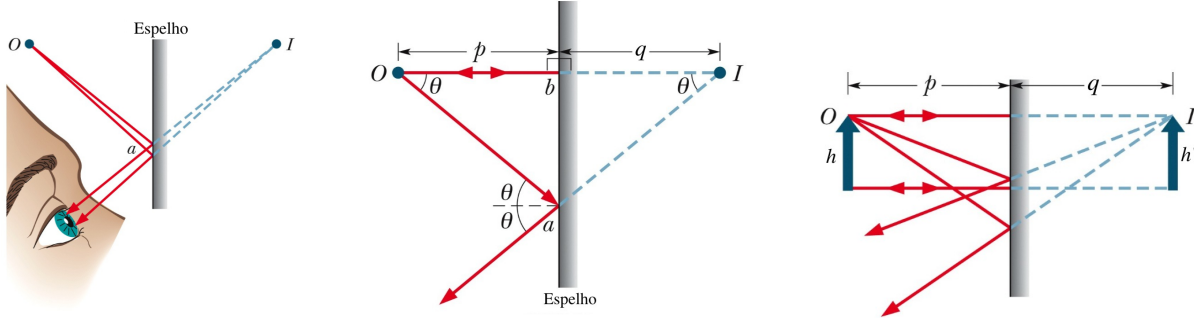


Figura B.2: Espelho Plano. Como consequência da lei da reflexão, a distância do objeto ao espelho é igual à distância da imagem ao espelho. (Halliday)

A imagem I é virtual, pois é formada por projeção dos raios atrás do espelho. Uma convenção que sempre usaremos é de que quantidades reais são positivas e quantidades virtuais são negativas. Portanto, neste caso $p > 0$ (objeto real) e $q < 0$ (imagem virtual).

A lei da reflexão então implica $p = -q$. A ampliação M , ou magnificação, é definida como:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \quad (\text{B.1})$$

onde a última igualdade decorre da semelhança de triângulos.

B.3 Espelho Esférico

Considere um objeto O e sua imagem I formada por um espelho plano e espelhos esféricos, como mostrados na Fig. B.3

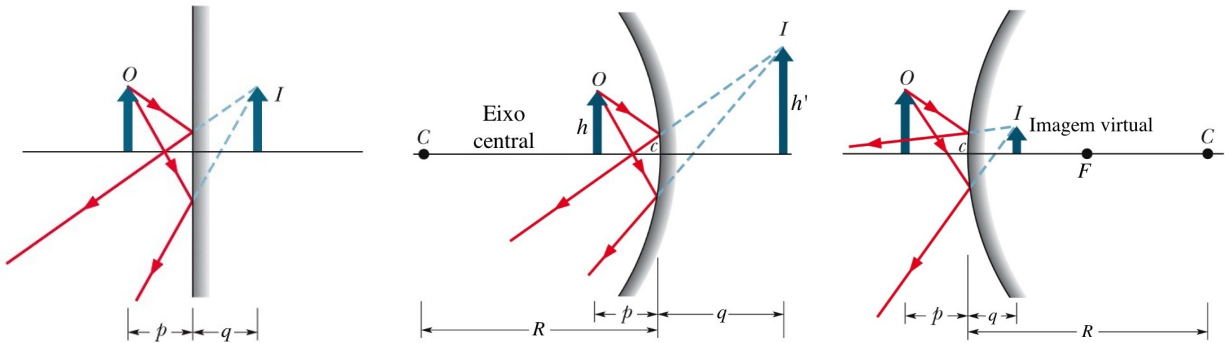


Figura B.3: Espelhos Esféricos. Um espelho plano pode ser deformado, tornando-se um espelho côncavo ou um espelho convexo. As distâncias e alturas das imagem não mais são iguais às do objeto. (Halliday)

Pensando no espelho esférico como uma deformação do espelho plano, temos que à medida que o espelho é deformado, a posição da imagem não mais será igual à do objeto ($p \neq -q$), e as alturas também não serão iguais $h' \neq h$.

Temos que definir uma série de quantidades:

C	: Centro de curvatura
c	: Vértice
R	: Raio de curvatura ($\overline{Cc}$)
F	: Foco
f	: distância focal ($= R/2$)
p	: distância do objeto
q	: distância da imagem
h	: altura do objeto
h'	: altura da imagem

Tabela B.1: Várias quantidades em espelhos planos e esféricos. As distâncias se referem ao vértice do espelho.

O foco F é definido como o ponto para onde raios paralelos ao eixo central convergem após serem refletidos. Veremos a seguir que de fato $f = R/2$ para espelhos esféricos. Por simetria, raios que incidem passando por F refletem paralelos ao eixo central.

Raios incidentes na direção de C incidem normalmente ao espelho, e pela lei da reflexão devem refletir normalmente. Ou seja, raios incidindo na direção de C refletem na direção de C .

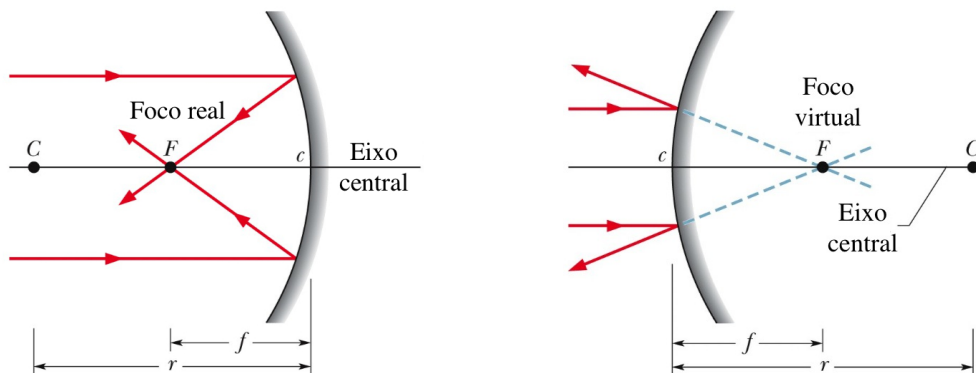


Figura B.4: Foco real (espelho côncavo) e virtual (espelho convexo), definido como o ponto para onde raios incidentes paralelos convergem (foco real) ou de onde os raios paralelos parecem divergir após a reflexão. Para espelhos esféricos $f = R/2$. (Halliday)

B.3.1 Espelho Esférico Côncavo

Para o espelho esférico côncavo, a posição e a altura da imagem, relativa ao objeto, depende da posição do objeto. Vamos considerar os vários casos mostrados na Fig. B.5:

$p < f$: Neste caso, a imagem é formada por projeção dos raios atrás do espelho. É portanto uma imagem virtual, e $q < 0$. Além disso, a imagem é direita (tem a mesma orientação do objeto) e $h' > h$, i.e. a imagem é maior e mais distante do vértice do que o objeto.

$p = f$: Neste caso, os raios refletidos são todos paralelos e não há formação de imagem atrás ou na frente do espelho. Dizemos que é uma imagem imprópria.

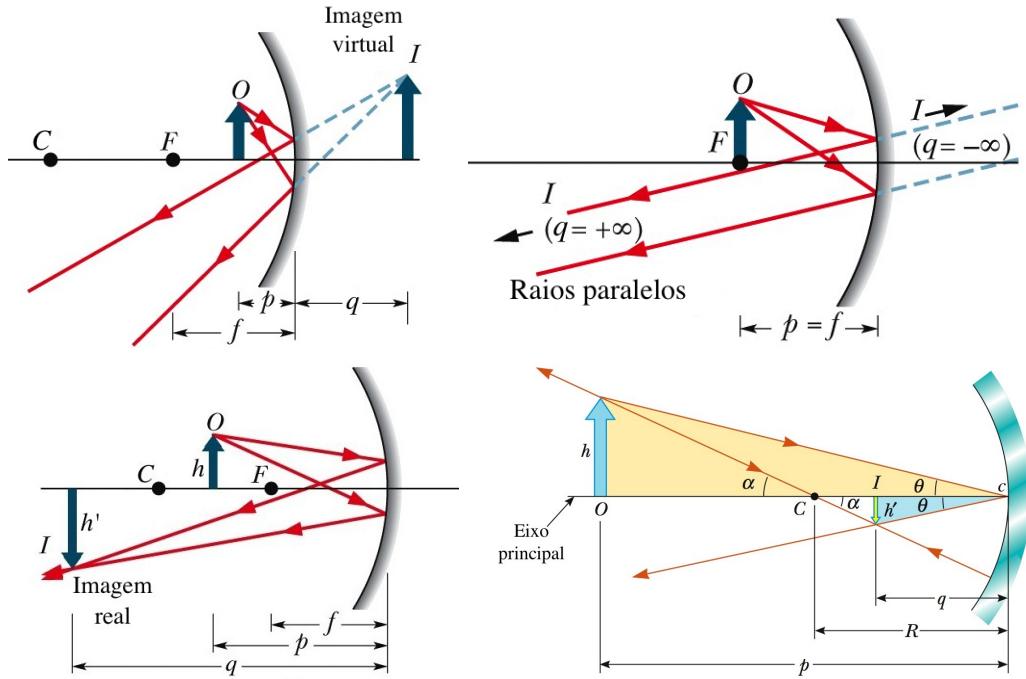


Figura B.5: Espelho Esférico Côncavo. A natureza, posição e altura da imagem dependem da posição do objeto relativa ao foco F e ao centro C . (Halliday, Serway)

$f < p < R$: Neste caso, os raios refletidos se encontram atrás do centro de curvatura C , formando ali uma imagem real e portanto $q > 0$. Temos ainda que $q > p$, e que a imagem é invertida, i.e. h e h' tem sinais opostos.

$p > R$: Este caso é totalmente simétrico ao anterior, trocando $O \rightarrow I$. Ou seja, agora a imagem real se forma entre C e F , temos $q > 0$. A imagem é novamente invertida.

Vamos analisar este último caso. Da geometria mostrada na figura, temos

$$\tan \theta = \frac{h}{p} = -\frac{h'}{q} \quad \text{note } h' < 0 \text{ (imagem invertida).}$$

Portanto, novamente a ampliação é dada por

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \tag{B.2}$$

expressão que também valia para uma espelho plano. Temos ainda que

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{h}{p-R} - \frac{-h}{R-q} \\ \rightarrow \frac{h'}{h} &= -\frac{R-q}{p-R} = -\frac{q}{p} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{R-q}{p-R} = \frac{p-R}{p} \rightarrow \frac{R}{q} - 1 = 1 - \frac{R}{p}$$

ou seja

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad (\text{Eq. dos espelhos}) \quad (\text{B.3})$$

Quando $p \rightarrow \infty$, que corresponde a um objeto muito distante, cujos raios incidem paralelamente ao eixo central do espelho, temos $1/p \rightarrow 0$ e portanto $q = R/2$. Ou seja, a imagem se forma em $q = R/2 = f$, definido como o foco do espelho. Temos então que de fato

$$f = \frac{R}{2} \quad (\text{B.4})$$

e portanto,

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}} \quad (\text{Eq. dos espelhos}) \quad (\text{B.5})$$

Note que para $R \rightarrow \infty$, temos $f \rightarrow \infty$ e portanto $1/f = 0$. Portanto $p = -q$, como esperado para o caso de um espelho plano.

B.3.2 Espelho Esférico Convexo

O caso de um espelho convexo é simétrico ao espelho côncavo com $p < f$, trocando $O \rightarrow I$.

Vemos que a imagem virtual se forma entre o vértice e o foco, e portanto $q < 0$. Além disso $h' < h$, e portanto $-q < p$, i.e. a imagem é menor e mais próxima do espelho do que o objeto.

Para espelhos esféricos em geral (incluindo convexas), sempre vale a equação dos espelhos Eq. B.5, desde que satisfeitas as convenções de sinais mostradas na Tab. B.2

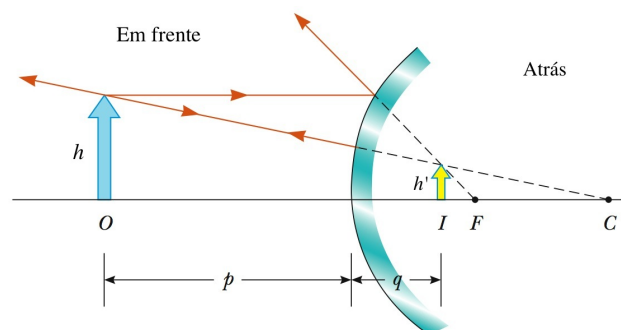


Figura B.6: Espelho Convexo. Situação simétrica a um espelho côncavo em que $p < f$, invertendo o objeto O e imagem I . (Serway)

Quantidade	Símbolo	Sinal	Posição ⁰	Natureza
Distância do objeto ¹	p	> 0	Em frente	Objeto real
Distância do objeto	p	< 0	Atrás	Objeto virtual
Distância da imagem ¹	q	> 0	Em frente	Imagem real
Distância da imagem	q	< 0	Atrás	Imagem virtual
Distância focal ²	f	> 0	Em frente	Foco real (espelho côncavo)
Distância focal	f	< 0	Atrás	Foco virtual (espelho convexo)
Ampliação da altura ³	M	> 0	-	Imagem direita
Ampliação da altura	M	< 0	-	Imagem invertida

Tabela B.2: Sinais de várias quantidades em espelhos planos e esféricos. ⁰ Posição relativa ao espelho;

¹ Distância ao espelho; ² Similarmente, raio de curvatura $R = 2f$. ³ Convencionando $h > 0$, temos que h' segue a mesma convenção de $M = h'/h$.

B.3.3 Construindo diagramas

Para construir diagramas e determinar graficamente a posição e tamanho da imagem em qualquer caso, basta usar 2 das 3 regras abaixo e encontrar a intersecção dos raios:

- 1) Raios incidentes por C se refletem por C .
- 2) Raios incidentes paralelos se refletem por F .
- 3) Raios incidentes por F se refletem paralelos.

B.4 Refração em Superfícies Esféricas

Da mesma forma que consideramos a reflexão por superfícies esféricas (espelhos), também podemos considerar o que ocorre com raios que são refratados em tais superfícies. Considere a superfície convexa mostrada na Fig B.7, em que um raio incide fazendo um ângulo θ_1 com a normal e refrata sob um ângulo θ_2 :

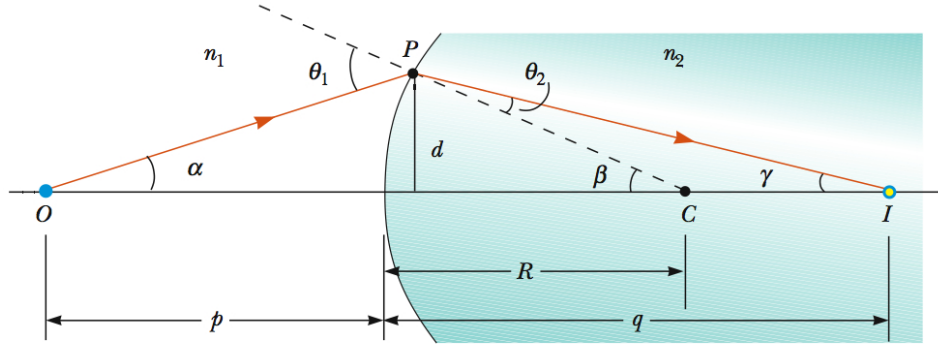


Figura B.7: Refração de um raio de luz em uma superfície esférica convexa com $n_2 > n_1$. (Serway)

Pela Lei de Snell, temos

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Estaremos trabalhando na *aproximação* de ângulos pequenos (raios para-axiais ao eixo central). Portanto todos os ângulos $\alpha, \beta, \gamma, \theta_1$ e θ_2 são ≈ 0 e temos e.g. $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$. Portanto

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (\text{B.6})$$

Notando alguns ângulos externos em triângulos, temos:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha + \beta && \text{Triângulo OPC} \\ \beta &= \theta_2 + \gamma && \text{Triângulo PCI} \end{aligned}$$

e portanto,

$$n_1(\alpha + \beta) = n_2(\beta + \gamma) \rightarrow n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$$

Na aproximação considerada, $\tan \alpha \approx \alpha \approx d/p$, $\tan \beta \approx \beta \approx d/R$ e $\tan \gamma \approx \gamma \approx d/q$. Portanto

$$\begin{aligned} n_1 \frac{d}{p} + n_2 \frac{d}{q} &= (n_2 - n_1) \frac{d}{R} \\ \rightarrow \boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} &= \frac{n_2 - n_1}{R}} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Para $p = \infty$ (raio incidente paralelo), $q = f_2$ e temos $n_2/f_2 = (n_2 - n_1)/R$. Por outro lado para $q = \infty$ (raio refratado paralelo), $p = f_1$ e temos $n_1/f_1 = (n_2 - n_1)/R$. Portanto

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{n_1}{n_2 - n_1} R \quad (\text{lado esquerdo}) \\ f_2 &= \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \quad (\text{lado direito}) \end{aligned}$$

i.e. temos dois focos distintos, e a posição dos focos relativa ao centro depende dos índices de refração. Como neste caso $n_2 > n_1$, temos e.g. $f_2 > R$.

Considere agora um objeto extenso sob refração, como na Fig. B.8. Da geometria, temos ($h' < 0$):

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{CI}{CO} = -\frac{q - R}{R + p}$$

Mas da Eq. B.7, temos

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} &= \frac{n_2 - n_1}{R} \\ \frac{qn_1 + pn_2}{pq} &= \frac{n_2 - n_1}{R} \\ \rightarrow R &= \frac{pq(n_2 - n_1)}{qn_1 + pn_2} \end{aligned}$$

Eliminando o R , temos

$$\begin{aligned} \frac{q - R}{R + p} &= \frac{q - \frac{pq(n_2 - n_1)}{qn_1 + pn_2}}{\frac{pq(n_2 - n_1)}{qn_1 + pn_2} + p} = \frac{q^2 n_1 + pqn_2 - pq(n_2 - n_1)}{pq(n_2 - n_1) + pqn_1 + p^2 n_2} \\ &= \frac{q^2 n_1 + pqn_1}{pqn_2 + p^2 n_2} = \frac{qn_1(q + p)}{pn_2(q + p)} = \frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{M = -\frac{n_1}{n_2} \frac{q}{p}} \quad (\text{B.8})$$

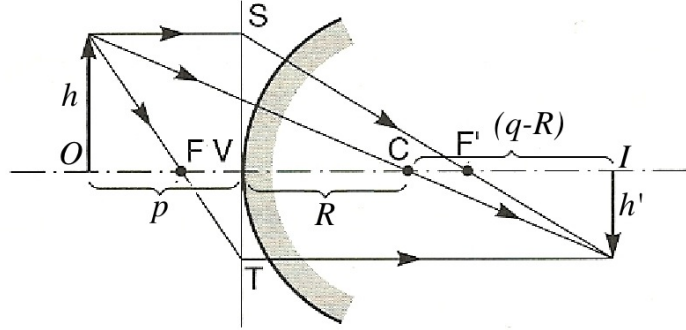
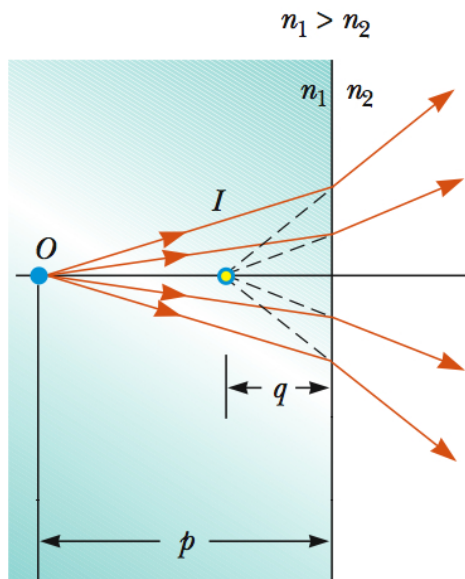


Figura B.8: Refração de um objeto extenso em uma superfície esférica convexa. (Nussenzweig)

B.4.1 Refração em Superfícies Planas



Tomando $R \rightarrow \infty$, a superfície esférica se torna uma superfície plana e

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = 0 \rightarrow \boxed{q = -\frac{n_2}{n_1}p} \quad (\text{B.9})$$

o que obviamente implica $M = 1$. Para $n_1 > n_2$, como numa interface água/ar, temos

$$|q| = \frac{n_2}{n_1}p < p \quad (\text{B.10})$$

Ou seja, a imagem parece mais próxima que a posição real do objeto, como na Fig. B.9.

Figura B.9: Refração em uma superfície plana, com $|q| < p$ para $n_2 > n_1$. (Serway)

B.4.2 Refração em Superfícies: Convenções

Para refração em uma superfície esférica (convexa ou côncava), a Eq. B.7 vale, desde que usemos a convenção de sinais da Tab B.3.

Quantidade	Símbolo	Sinal	Posição ⁰	Natureza
Distância do objeto ¹	p	> 0	Em frente	Objeto real
Distância do objeto	p	< 0	Atrás	Objeto virtual
Distância da imagem ¹	q	> 0	Atrás	Imagem real
Distância da imagem	q	< 0	Em frente	Imagem virtual
Centro de Curvatura	R	> 0	Atrás	centro real (superfície convexa)
Centro de Curvatura	R	< 0	Em frente	centro virtual (superfície côncava)

Tabela B.3: Sinais de várias quantidades para refração em superfícies esféricas. ⁰ Posição relativa à superfície; ¹ Distância à superfície.

B.5 Lentes Delgadas

Uma lente é basicamente um sistema com duas superfícies de refração, que produz um desvio total dos raios incidentes que são refratados. Um exemplo já visto foi o prisma.

As lentes são nomeadas de acordo com as 2 superfícies que a compõem (e.g. biconvexa para duas superfícies convexas, etc.) e classificadas em lentes convergentes e divergentes, dependendo do desvio total ser no sentido de convergir ou divergir os raios refratados relativamente aos incidentes.

Vamos agora obter, de duas formas distintas, a Eq. das lentes, similar à Eq. dos espelhos e das superfícies esféricas refratoras.

B.5.1 Derivação 1: Duas superfícies refratoras

Ideia básica: A lente é um sistema com 2 superfícies esféricas com raios de curvatura R_1 e R_2 . A imagem gerada pela superfície 1 serve de objeto para a superfície 2, que produz a imagem final.

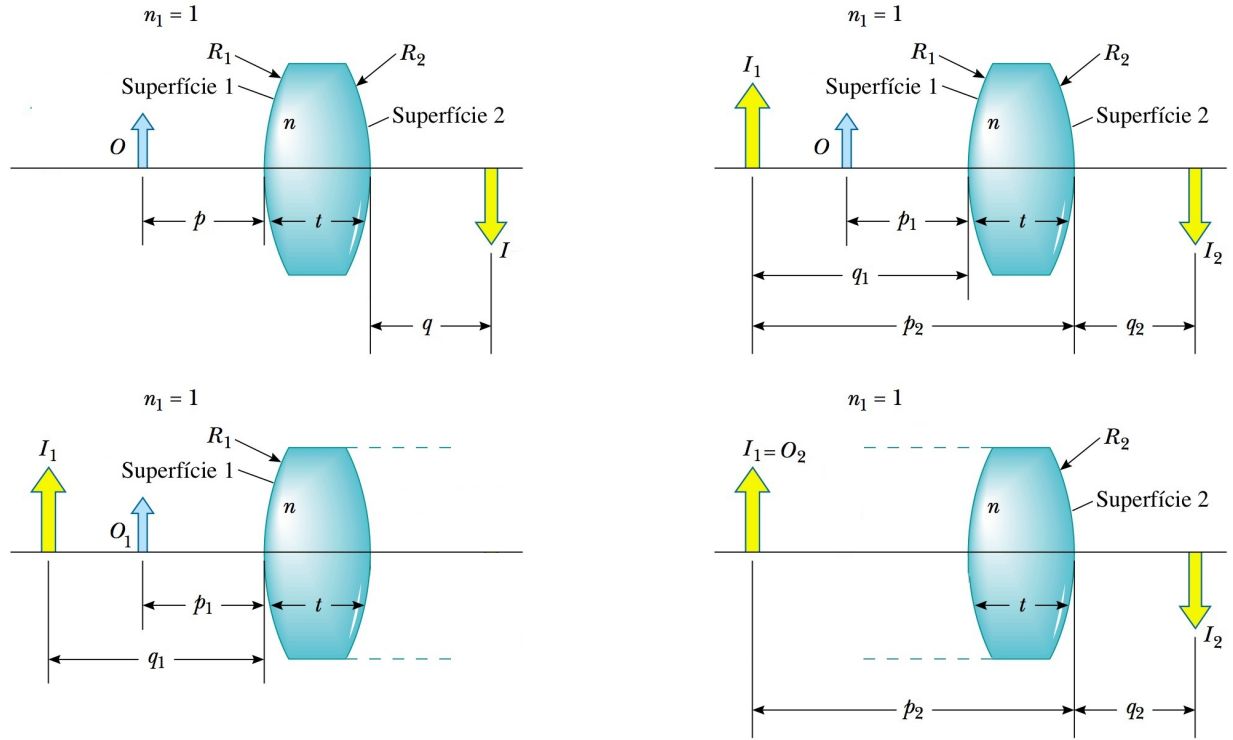


Figura B.10: Lente biconvexa delgada ($t \approx 0$) vista como duas superfícies. (Serway)

Considere, e.g. uma lente biconvexa com $n_2 = n$ imersa em ar, i.e. $n_1 = 1$, o objeto O à esquerda da lente e sua imagem I à direita da lente, como no painel esquerdo superior da Fig B.10. O painel direito superior mostra as imagens intermediária (I_1) e final ($I_2 = I$).

Considerando primeiro somente o efeito da superfície 1, como no painel esquerdo inferior, temos:

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{q_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \rightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n - 1}{R_1} \quad (\text{B.11})$$

onde $q_1 < 0$, pois a imagem é virtual.

No painel direito inferior, identificamos $I_1 = O_2$, e temos $p_2 = -q_1 + t \approx -q_1$ (lente delgada). Portanto o efeito da superfície 2 fica:

$$\frac{n_2}{p_2} + \frac{n_1}{q_2} = \frac{n_1 - n_2}{R_2} \rightarrow \frac{n}{-q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1 - n}{R_2} \quad (\text{B.12})$$

Somando as duas equações anteriores e identificando $p_1 = p$ e $q_2 = q$, temos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{B.13})$$

B.5.2 Derivação 2: Princípio de Fermat

Vamos obter agora esse mesmo resultado usando o Princípio de Fermat. Considere um ponto objeto O que produz uma imagem I , como na Fig B.11

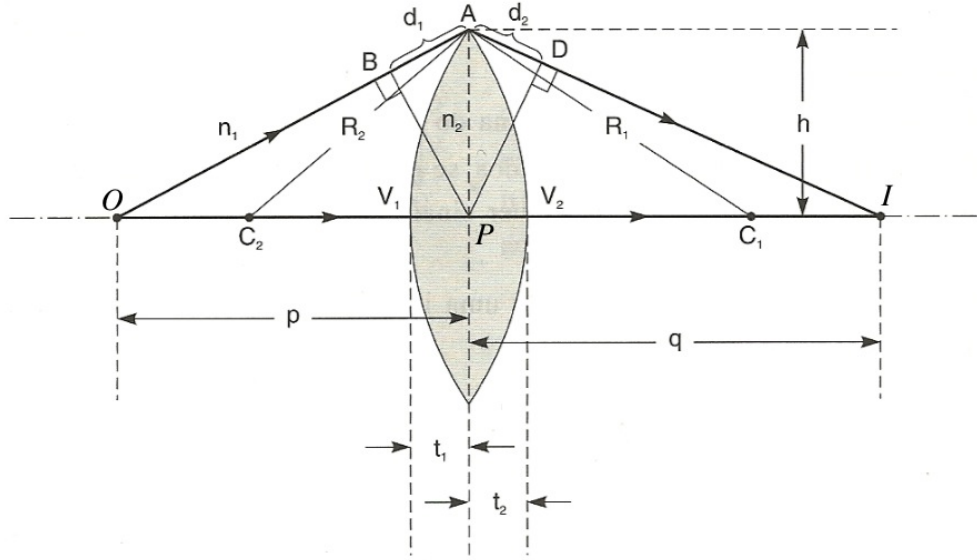


Figura B.11: Lente Biconvexa e o Princípio de Fermat: $t_{OAI} = t_{OPI}$. (Nussensveig)

Pelo Princípio de Fermat, o tempo para a luz percorrer o trajeto OAI e o trajeto OPI deve ser o mesmo, e igual ao tempo mínimo. Ou seja, embora o trecho OPI seja mais curto, a luz tem menor velocidade no trecho V_1V_2 e acaba gastando o mesmo tempo que no trajeto OAI , onde ela fica o tempo todo com velocidade maior (como evitar a Rebouças para chegar na Paulista). Portanto

$$t_{OAI} = t_{OPI} \quad (\text{B.14})$$

Decompondo esses tempos em pedaços e indicando o índice de refração percorrido:

$$\begin{aligned} t_{OB}^{n_1} + t_{BAD}^{n_1} + t_{DI}^{n_1} &= t_{OV_1}^{n_1} + t_{V_1V_2}^{n_2} + t_{V_2I}^{n_1} \\ &= t_{OV_1}^{n_1} + (t_{V_1P}^{n_1} - t_{V_1P}^{n_1}) + (t_{PV_2}^{n_1} - t_{PV_2}^{n_1}) + t_{V_1V_2}^{n_2} + t_{V_2I}^{n_1} \\ &= t_{OP}^{n_1} + t_{PI}^{n_1} + (t_{V_1V_2}^{n_2} - t_{V_1V_2}^{n_1}) \end{aligned}$$

Como $t_{OB}^{n_1} = t_{OP}^{n_1}$ e $t_{DI}^{n_1} = t_{PI}^{n_1}$, após cancelamentos destes termos temos

$$\begin{aligned} t_{BAD}^{n_1} &= t_{V_1V_2}^{n_2} - t_{V_1V_2}^{n_1} \\ \rightarrow \frac{d_1 + d_2}{v_1} &= \frac{t_1 + t_2}{v_2} - \frac{t_1 + t_2}{v_1} \quad \times c \\ \rightarrow n_1(d_1 + d_2) &= (n_2 - n_1)(t_1 + t_2) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Da geometria de alguns triângulos, temos

$$\begin{aligned}\Delta APO : \quad h^2 &= (p + d_1)^2 - p^2 = 2pd_1 + d_1^2 \approx 2pd_1 \quad (\text{approx. lente delgada}) \rightarrow d_1 = \frac{h^2}{2p} \\ \Delta API : \quad &\rightarrow d_2 = \frac{h^2}{2q} \\ \Delta APC_1 : \quad h^2 &= R_1^2 - (R_1 - t_1)^2 - p^2 \approx 2R_1 t_1 \rightarrow t_1 = \frac{h^2}{2R_1} \\ \Delta APC_2 : \quad &\rightarrow t_2 = -\frac{h^2}{2R_2}\end{aligned}$$

Portanto

$$n_1 \left(\frac{h^2}{2p} + \frac{h^2}{2q} \right) = (n_2 - n_1) \left(\frac{h^2}{2R_1} - \frac{h^2}{2R_2} \right) \quad (\text{B.16})$$

ou seja, apos cancelar $h^2/2$ em ambos os lados, obtemos

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}} \quad (\text{Eq. das Lentes}) \quad (\text{B.17})$$

onde o foco f é dado por

$$\boxed{\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (\text{Eq. do Fabricante de Lentes}) \quad (\text{B.18})$$

Esta equação pode ser usada tanto para lentes convergentes (como a biconvexa para a qual ela foi derivada), como para lentes divergentes, desde que seguidas as convenções da Tab B.4

Quantidade	Símbolo	Sinal	Posição ⁰	Natureza
Distância do objeto ¹	p	> 0	Em frente	Objeto real
Distância do objeto	p	< 0	Atrás	Objeto virtual
Distância da imagem ¹	q	> 0	Atrás	Imagem real
Distância da imagem	q	< 0	Em frente	Imagem virtual
Centro de Curvatura	R_1 e R_2	> 0	Atrás	-
Centro de Curvatura	R_1 e R_2	< 0	Em frente	-
Distância Focal ¹	f	> 0	-	Lente Convergente
Distância Focal	f	< 0	-	Lente Divergente

Tabela B.4: Sinais de várias quantidades para lentes convergentes e divergentes. ⁰ Posição relativa à lente;

¹ Distância à lente.

