# Apêndice E

# Efeito Doppler via Fase de Onda

Suponha que uma onda eletromagnética plana se propaga na direção $x$ com campo elétrico

$$E = E_0 e^{-i(kx-\omega t)} \tag{E.1}$$

O argumento

$$\phi = (kx - \omega t) \tag{E.2}$$

representa a fase da onda eletromagnética. A cada vez que $\phi$ varia de $2\pi$, percorre-se um comprimento de onda. Desta forma $\phi$ conta e.g. o número de cristas de onda da radiação.

Suponha que foi medido em S um certo número de cristas de onda por um detector, por exemplo 5 cristas. Se no instante $t$ e posição $x$ foi medida a quinta crista de onda em S, temos que em S$'$, este evento também corresponderá à medida da quinta crista de onda, mas agora no instante $t'$ e na posição $x'$. Desta forma a fase de onda deve ser a mesma em S e em S$'$:

$$\phi' = \phi \tag{E.3}$$

Podemos escrever

$$\phi = (kx - \omega t) = k(x - ct) = kc(\frac{x}{c} - t) = \omega(\frac{x}{c} - t) = 2\pi\nu(\frac{x}{c} - t) = 2\pi F \tag{E.4}$$

ou seja, o argumento $F$ é precisamente a contagem de cristas de onda: a cada valor inteiro de $F$, a fase varia de um adicional de $2\pi$ e percorre-se um comprimento de onda. Assim, para

$$F = \nu(\frac{x}{c} - t) \tag{E.5}$$

devemos ter

$$F' = F\,. \tag{E.6}$$

Inserindo as transformações de Lorentz para $x'$ e $t'$, temos

$$\begin{aligned} F' &= \nu' \left(\frac{x'}{c} - t'\right) \\ &= \nu' \left(\frac{\gamma}{c}(x - vt) - \gamma(t - vx/c^2)\right) \\ &= \nu'\gamma \left(\frac{x}{c}(1 + v/c) - t(1 + v/c)\right) \\ &= \nu'\gamma(1 + \beta) \left(\frac{x}{c} - t\right) \end{aligned} \tag{E.7}$$

Como $F' = F$, devemos ter

$$\nu'\gamma(1+\beta) = \nu \tag{E.8}$$

mas

$$\gamma(1+\beta) = \frac{(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(1+\beta)}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \tag{E.9}$$

Portanto

$$\boxed{\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu} \tag{E.10}$$

Aqui derivamos o efeito Doppler quando a onda se propaga na mesma direção em que os referenciais se afastam (direção $x$). Pode-se considerar a propagação em uma direção arbitrária e deduzir também o efeito Doppler para propagação na direção perpendicular ao movimento dos referenciais, bem como o efeito de aberração (mudança de direção de propagação entre referenciais). Veja Moysés Vol. 4, § 6.8.