Capítulo 2

Interferência da Luz

A natureza ondulatória da luz se mostra nas propriedades de interferência e difração, que vamos considerar neste capítulo e no próximo.

2.1 Interferência por Fenda Dupla

Em 1810, Young demonstrou experimentalmente que a luz é uma onda. Note que isso ocorreu muito antes do estabelecimento das Eqs. de Maxwell, que proveram argumentos teóricos para a natureza ondulatória da luz.

O diagrama do aparato usado por Young é mostrado na Fig 2.1. Um feixe de luz coerente (com mesma fase de onda), proveniente de uma fenda S_0, incide sobre duas fendas S_1 e S_2, atravessando-as, difratando e atingindo uma tela de observação C. As luzes proveniente de S_1 e S_2 se combinam formando um padrão de interferência na tela, com regiões claras e escuras (intensidades máxima e mínima).

A explicação ondulatória é que as luzes provenientes de S_1 e S_2 se somam na tela, interferindo de forma construtiva ou destrutiva, dependendo de suas diferenças de fase, como mostrado na Fig. 2.2.

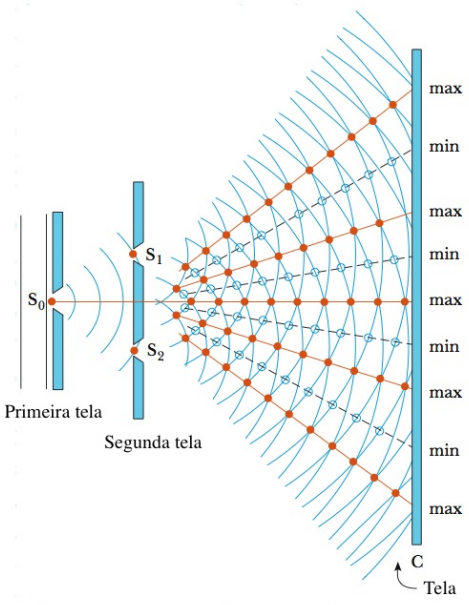

Figura 2.1: Aparato do experimento de Young. Uma fonte de luz coerente incide sobre as fendas S_1 e S_2 e difratam até a tela de observação, onde formam um padrão de interferência. (Serway)

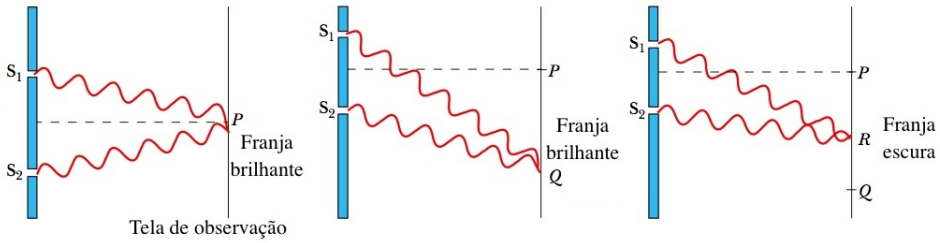

Figura 2.2: Interferência construtiva e destrutiva das ondas que passam por cada fenda. (Serway)

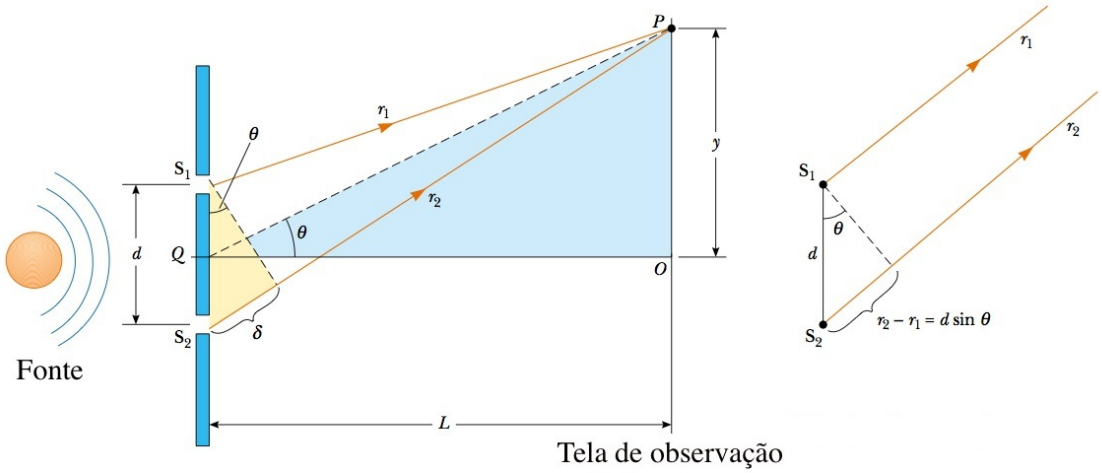

Figura 2.3: A interferência das ondas provenientes de S_1 e S_2 depende da diferença de fase, ou diferença de caminho $d\sin\theta$ entre as ondas. (Serway)

2.1.1 Análise Complexa

Vamos tomar o campo elétrico $E(\vec{x},t)$ com a representação complexa de uma onda plana:

$$E(\vec{x},t) \;=\; \text{Re}\left[A\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right] = \text{Re}\left[v(\vec{x})e^{-i\omega t}\right] \qquad \text{onde} \qquad v(\vec{x}) = A\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2.1}$$

e a intensidade associada ao campo $I(\vec{x}) = \langle E^2\rangle = |v(\vec{x})|^2 = A^2$. Considere $\vec{x}$ saindo do ponto Q ao ponto P, delimitando uma altura y na tela de observação e um ângulo θ. O campo total no ponto P é a soma das contribuições das duas fendas S_1 e S_2:

$$\begin{aligned} E(\vec{x},t) &= E_1(\vec{x},t) + E_2(\vec{x},t) = A\; e^{i(kr_1-\omega t)} + A\; e^{i(kr_2-\omega t)} \\ &= Ae^{-i\omega t}\left[e^{ikr_1} + e^{ikr_2}\right] \\ &= v(y)e^{-i\omega t} \;\text{ onde }\; v(y) = A\left[e^{ikr_1} + e^{ikr_2}\right] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Na aproximação em que $L \gg d$, temos, com $R = |\vec{x}|$

$$r_1 = R - \frac{d}{2}\sin\theta \tag{2.3}$$

$$r_2 = R + \frac{d}{2}\sin\theta \tag{2.4}$$

e $d\sin\theta = r_2 - r_1$. Portanto

$$\begin{aligned} v(y) = v(\theta) &= A\left[e^{i(kR-\frac{kd}{2}\sin\theta)} + e^{i(kR+\frac{kd}{2}\sin\theta)}\right] \\ &= Ae^{ikR}\left[e^{-i\delta/2} + e^{i\delta/2}\right] \;\text{ onde }\; \delta = kd\sin\theta = k(r_2 - r_1) \\ &= 2Ae^{ikR}\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aqui $\delta(\theta) = kd\sin\theta = k(r_2 - r_1)$ é a diferença de fase entre as 2 ondas. Quando $r_2 - r_1 = \lambda$, $\delta = 2\pi$. A intensidade resultante em P fica

$$I(\theta) = |v(\theta)|^2 = 4A^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{2.6}$$

Como a intensidade de uma fenda isolada seria $I_1(\theta) = |v_1(\theta)|^2 = |Ae^{i(kR\pm\delta/2)}|^2 = A^2$, temos

$$\boxed{I(\theta) = 4I_1(\theta)\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \tag{2.7}$$

Ou seja, a intensidade de fato oscila entre $4I_1$ e 0. As condições para interferência construtiva (máximos) ficam (usando $k = 2\pi/\lambda$):

$$\begin{aligned} \delta &= 2m\pi\,, \quad \text{onde } m = 0, 1, 2, 3, ... \\ kd\sin\theta &= 2m\pi \\ \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta &= 2m\pi \;\rightarrow\; \boxed{r_2 - r_1 = d\sin\theta = m\lambda} \qquad \text{(Máximo)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

e para interferência destrutiva (mínimos) temos

$$\delta = (2m+1)\pi \;\rightarrow\; \boxed{r_2 - r_1 = d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda} \qquad \text{(Mínimo)} \tag{2.9}$$

Para ângulos pequenos, $\sin\theta \approx \theta \approx m\lambda/d$, e a separação entre os máximos (mínimos) é de

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} \tag{2.10}$$

Note que a intensidade que passa pelas duas fendas seria $2I_1$. Como podemos ter então pontos com $I = 4I_1$? Se calcularmos a intensidade média sobre várias regiões com franjas de máximos e mínimos, como $\langle\cos^2(\delta/2)\rangle = 1/2$, temos

$$\langle I\rangle = 2I_1 \tag{2.11}$$

ou seja, a intensidade média é igual à intensidade das duas fendas. Há apenas uma redistribuição de energia, com regiões com 2 vezes o valor médio e regiões com intensidade nula. Nas regiões onde $I = 0$, o campo é nulo, ou seja, luz superposta com luz dando escuridão.

Como $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, podemos escrever

$$I = 4I_1\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 2I_1(1 + \cos\delta) = 2I_1 + 2I_1\cos\delta \tag{2.12}$$

O segundo termo, $2I_1\cos\delta$, é chamado *termo de interferência*, e sua presença é prova de que a luz é uma onda. Tivesse ela apenas caráter corpuscular, esperaríamos $I = 2I_1$ em todos os pontos.

2.1.2 Análise Real

Vamos agora usar a representação real do campo elétrico $E(\vec{x}, t)$ de uma onda plana:

$$E(\vec{x}, t) \;=\; A\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \tag{2.13}$$

O campo total no ponto P é a soma das contribuições das duas fendas S_1 e S_2:

$$E(\vec{x},t) \;=\; E_1(\vec{x},t)+E_2(\vec{x},t) = A\cos(kr_1-\omega t)+A\cos(kr_2-\omega t) \tag{2.14}$$

Usando

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{2.15}$$

temos

$$E(\vec{x},t) \;=\; 2A\cos\left[\frac{k(r_1+r_2)}{2}-\omega t\right]\cos\left[\frac{k(r_2-r_1)}{2}\right] \tag{2.16}$$

Na aproximação em que $L \gg d$, temos

$$r_1 = R-\frac{d}{2}\sin\theta \tag{2.17}$$

$$r_2 = R+\frac{d}{2}\sin\theta \tag{2.18}$$

e assim $(r_2+r_1)/2 = R$ e também $(r_2-r_1) = d\sin\theta$. Portanto

$$E(\vec{x},t) \;=\; 2A\cos(kR-\omega t)\cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right) \tag{2.19}$$

Portanto, com $\delta = kd\sin\theta$, temos

$$I(\theta) \;=\; \langle E^2\rangle \;=\; 4A^2\langle\cos^2(kR-\omega t)\rangle\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \;=\; 2A^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{2.20}$$

onde usando que $\langle\cos^2(kR-\omega t)\rangle = 1/2$. Mas a intensidade de uma única fenda seria

$$I_1 = \langle E_1^2\rangle = A^2\langle\cos^2(kr_1-\omega t)\rangle = \frac{A^2}{2} \tag{2.21}$$

Portanto $A^2 = 2I_1$ e temos

$$I(\theta) = \langle E^2\rangle = 4I_1\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{2.22}$$

exatamente como na análise complexa.

2.2 Mudança de Fase na Reflexão: Incidência Normal

Para reflexão em incidência normal, obtivemos a relação entre campo refletido e incidente:

$$E_{0r} = \frac{1-\beta}{1+\beta}E_{0i} \tag{2.23}$$

onde $\beta = n_2/n_1$. Vamos considerar $n_2 > n_1$, i.e. incidência do meio menos para o mais refringente. Neste caso, $\beta > 1$ e temos portanto

$$1-\beta < 0 \tag{2.24}$$

Desta forma, E_{0r} terá sinal *oposto* a E_{0i}. Mas como

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1\,, \tag{2.25}$$

esse sinal negativo implica uma mudança de fase de onda de π na onda refletida. Isso ocorre sempre que a reflexão ocorre com incidência do meio menos para o mais refrativo.

Para uma mudança de fase de π, usando $k = 2\pi/\lambda$ temos:

$$E(x,t) = E_0 e^{i(kx-\omega t)} \to E_0 e^{i\pi} e^{i(kx-\omega t)} = E_0 e^{i[k(x+\pi/k)-\omega t]} = E_0 e^{i[k(x+\lambda/2)-\omega t]} = E(x+\lambda/2, t)$$

ou seja, a mudança de fase de π implica uma defasagem espacial de $\lambda/2$: $x \to x + \lambda/2$.

No caso contrário em que $n_2 < n_1$, não há mudança de fase.

Já nos raios refratados:

$$E_{0t} = \frac{2}{1+\beta} E_{0i}\,, \tag{2.26}$$

o coeficiente é sempre positivo, e também não há mudança de fase.

Esses resultados são válidos mesmo no caso de incidência oblíqua (ver Appendix C).

2.3 Interferência em Filmes Finos: Incidência Normal

Considere uma película plana de espessura d, como mostrada na Fig. 2.4. Um raio incide no ponto A da interface do meio 1 com a película, fazendo um ângulo θ_1 com a normal. Parte deste raio é refletida (raio 1), e outra parte é transmitida ao meio 2 pelo trecho AB. Parte deste raio transmitido é refletido de volta ao meio incidente via o trecho BC (raio 2), e outra parte é transmitida a um terceiro meio (raio 3).

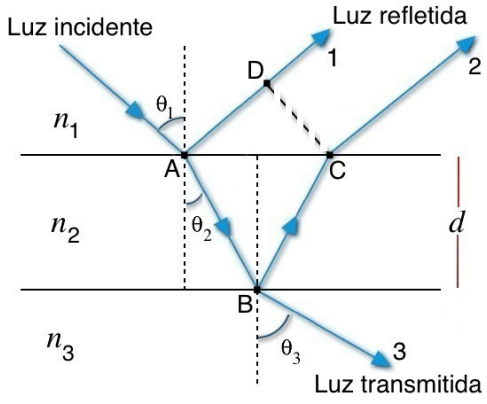

Figura 2.4: Interferência em uma película fina de espessura d.

Gostaríamos de saber a condição de interferência construtiva/destrutiva dos raios 1 e 2 com comprimento de onda no vácuo λ. Vamos considerar o caso de incidência praticamente normal, i.e. $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta_3 \approx 0$ e assumir que $n_2 > n_1 = n_3$, e.g. uma película de plástico suspensa no ar . Neste caso, temos que a diferença de caminho entre os raios 1 e 2 é de $2d$. Entretanto, como $n_2 > n_1$ o raio 1 sofre mudança de fase de π na reflexão, ou equivalentemente uma defasagem de $\lambda/2$. Portanto, para que tenhamos interferência construtiva/destrutiva, é preciso

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2\,, \text{ onde } m = 0, 1, 2, 3, ... \text{ (Construtiva)} \tag{2.27}$$

$$2d = m\lambda_2\,, \text{ onde } m = 1, 2, 3, ... \text{ (Destrutiva)} \tag{2.28}$$

onde $\lambda_2 = \lambda/n_2$. Note que se tivéssemos $n_3 > n_2$, teríamos uma mudança de fase também do raio 2 na sua reflexão em B. Portanto, neste caso, as condições de interferência construtiva/destrutiva se inverteriam com relação ao caso acima.

Exercício: Considere o caso em que θ_1 não é pequeno e as diferenças de caminho ABC do raio 2 e AD do raio 1 devem ser consideradas na diferença de fase e nas condições de interferência (veja Apêndice D).

Por que o filme deve ser "fino"? A luz incidente usualmente vem em pulsos de ondas gerados por processos aleatórios (emissão atômica, etc.). Portanto, para que haja interferência é preciso que um único pulso entre na película e retorne para interferir com ele mesmo, i.e. o raio 1 e 2 devem ter o mesmo pulso de origem; caso contrário não haverá coerência dos raios. É por isso que podemos ver máximos e mínimos em uma bolha de sabão, mas não em uma placa de vidro.