

Capítulo 3

Difração

3.1 Difração por fenda simples

Experimento de Young: luz de 2 fendas *pequenas* interferem na tela de observação, produzindo um padrão de interferência. O que ocorre no caso de apenas uma fenda, não necessariamente pequena?

Princípio de Huygens: uma frente de onda é um conjunto de fontes pontuais que se combinam para formar a frente de onda em um instante seguinte. Difração: interferência da onda com ela mesma, i.e. luzes de todos os pontos (contínuo) da fenda interferem na tela de observação. O caso de uma fenda dupla pequena corresponde ao limite de apenas 2 pontos interferindo.

Aqui consideraremos apenas a *difração de Fraunhofer*, em que os raios saindo da fenda podem ser aproximados como paralelos, e.g. se a distância da fenda à tela de observação D é grande ($D \gg a$). O limite de pequenas distâncias corresponderia à *difração de Fresnel*.

Antes de achar o padrão de difração e suas intensidades, podemos mais facilmente encontrar os pontos de mínimo. Considere uma fenda simples de largura a , como na Fig 3.1. Considere a interferência de pares de raios, e.g. raio 1 e raio 2, raio 3 e raio 4, etc. Para todos estes pares de raios a diferença de caminho entre eles é:

$$[1] - [2] = [3] - [4] = \dots = \frac{a}{2} \sin \theta \quad (3.1)$$

Se essa diferença de caminho for igual a $\lambda/2$, todos esses pares se cancelaram em P_1 na tela de observação, e teremos interferência destrutiva neste ponto. Portanto:

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a \sin \theta = \lambda \quad (1^\circ \text{ mínimo})} \quad (3.2)$$

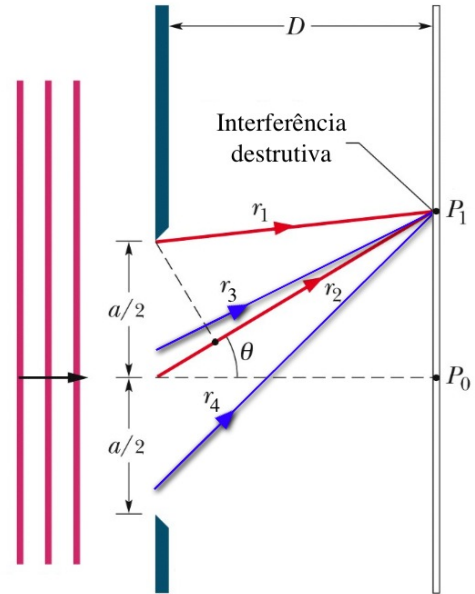
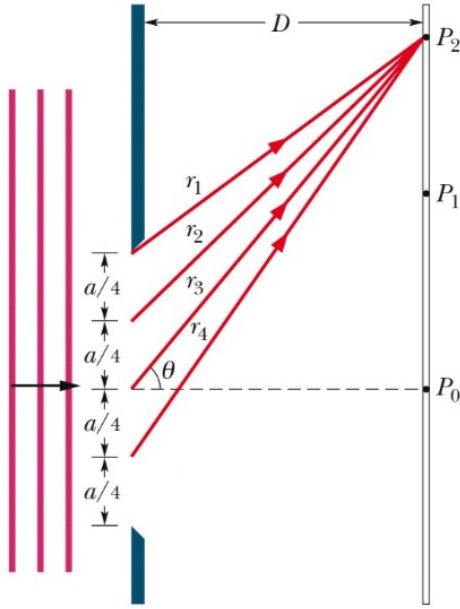


Figura 3.1: Formação do 1º mínimo de difração no ponto P_1 . (Halliday)



A condição acima define o primeiro mínimo. Mínimos sucessivos podem ser obtidos imaginando que exatamente o que aconteceu na fenda de largura a , aconteça com cada uma de suas frações (e.g. cada uma de suas metades se cancela independentemente, etc).

Por exemplo, se dividirmos a fenda em 2 partes, cada uma de largura $a/2$ e repetirmos a análise acima para cada parte, os raios na primeira metade da fenda se cancelam e os raios na segunda metade se cancelam independentemente. A Fig 3.2 mostra essa segunda maneira dos raios se cancelarem no ponto P_2 da tela de observação. Vamos considerar novamente a interferência de pares de raios, e.g. raio 1 e raio 2, raio 2 e raio 3, etc. Para estes pares a diferença de caminho é:

Figura 3.2: Formação do 2º mínimo de difração no ponto P_2 . (Halliday)

$$[1] - [2] = [2] - [3] = \dots = \frac{a}{4} \sin \theta \quad (3.3)$$

Se essa diferença de caminho for igual a $\lambda/2$, todos os pares da primeira metade da fenda se cancelarão e todos os pares da segunda metade se cancelarão de forma independente. Assim, todos os pares da fenda como um todo se cancelam em P_2 :

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{a \sin \theta = 2\lambda \quad (2^\circ \text{ mínimo})} \quad (3.4)$$

Prosseguindo neste raciocínio sucessivamente, temos

$$\boxed{a \sin \theta = m\lambda \quad (m^{\text{th}} \text{ mínimo})} \quad (3.5)$$

Antes de calcular o padrão de difração em uma fenda simples, vamos primeiro lembrar do caso da interferência em fenda dupla de largura pequena, como mostrado na Fig 3.3.

Neste caso, tínhamos

$$E(P) = E_1 + E_2,$$

onde $E_1 = v_1 e^{-i\omega t}$, e $v_1 = A e^{ikr_1}$

Mostramos anteriormente que

$$\begin{aligned} E(P) &= v e^{-i\omega t} \\ \text{onde } v &= \tilde{v} \left[e^{-ik\frac{d}{2}\sin\theta} + e^{+ik\frac{d}{2}\sin\theta} \right] \\ \text{e } \tilde{v} &= A e^{ikR} \end{aligned}$$

Definindo coordenadas $\vec{x}$ com centro entre as duas fendas, e denotando a coordenada da fenda de cima $x_1 = d/2$ e da fenda de baixo $x_2 = -d/2$, segue que

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{x}_1 &= |\vec{k}| |\vec{x}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = k \frac{d}{2} \sin\theta \\ \vec{k} \cdot \vec{x}_2 &= |\vec{k}| |\vec{x}_2| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -k \frac{d}{2} \sin\theta \end{aligned}$$

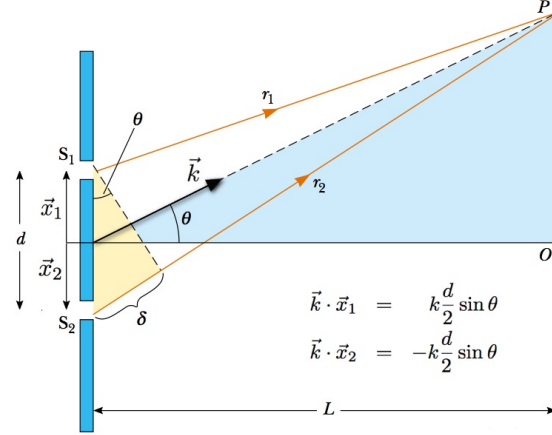


Figura 3.3: Interferência em uma fenda dupla. (Serway)

Portanto, podemos escrever a amplitude do campo no caso de uma fenda dupla como

$$\begin{aligned} v &= \tilde{v} [e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_2}] \\ &= \tilde{v} \sum_{j=1}^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_j} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para obter o padrão de difração, só precisamos generalizar essa expressão para infinitos pontos ao invés de apenas 2. Para N pontos na fenda igualmente espaçados de $\Delta x = a/N$, onde a é o tamanho da fenda teríamos

$$v(\theta) = \tilde{v} \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_j} \quad (3.7)$$

Note que quando $\theta = 0$, temos $\vec{k} \cdot \vec{x}_j = kx_j \sin 0 = 0$ para todo j , e a amplitude é máxima:

$$v(0) = \tilde{v} \sum_{j=1}^N 1 = N\tilde{v} \quad (3.8)$$

Portanto, relativamente a este valor máximo, temos (usando $\Delta x = a/N$):

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_j} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}_j} \Delta x \quad (3.9)$$

Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ em que $\Delta x \rightarrow 0$, a soma se torna uma integral

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx \quad (3.10)$$

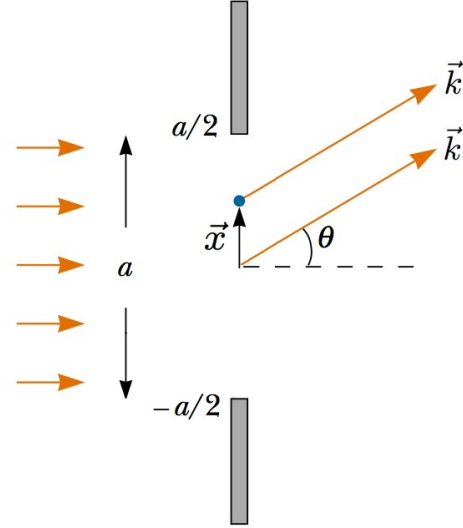


Figura 3.4: Difração em uma fenda simples. Cada ponto $\vec{x}$ no contínuo da fenda contribui para a interferência com fase $\vec{k} \cdot \vec{x}$. (Serway)

que podemos calcular como

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx \sin \theta} dx = \frac{1}{a} \frac{e^{-ikx \sin \theta}}{-ik \sin \theta} \Big|_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{1}{a} \frac{e^{-ik \frac{a}{2} \sin \theta} - e^{ik \frac{a}{2} \sin \theta}}{-ik \sin \theta} = \frac{1}{k \frac{a}{2} \sin \theta} \frac{e^{ik \frac{a}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{a}{2} \sin \theta}}{2i} = \frac{\sin(k \frac{a}{2} \sin \theta)}{k \frac{a}{2} \sin \theta} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \\ \beta &= ka \sin \theta \end{aligned}$$

Finalmente, como $I = \langle E^2 \rangle = |v|^2$, temos

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{v(\theta)^2}{v(0)^2}$$

ou

$$\boxed{\frac{I(\theta)}{I_0} = \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad \text{onde} \quad \beta = ka \sin \theta} \quad (\text{Difração, Fenda Simples}) \quad (3.11)$$

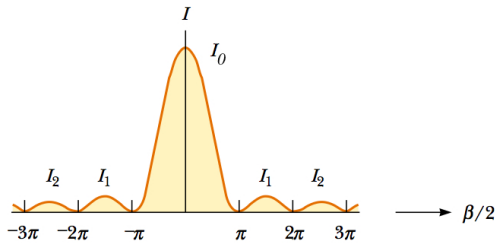


Figura 3.5: Padrão de intensidade na difração em uma fenda simples. (Serway)

Este padrão de interferência está mostrado na Fig 3.5. Note que os mínimos ocorrem quando $\sin(\beta/2) = 0$, ou seja para

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} &= m\pi, \quad m = 1, 2, \dots \\ \rightarrow \frac{ka \sin \theta}{2} &= m\pi, \quad k = 2\pi/\lambda \\ \rightarrow a \sin \theta &= m\lambda \end{aligned} \quad (3.12)$$

que é exatamente a condição que havíamos encontrado anteriormente. A posição dos máximos pode ser bem aproximada como centrada entre dois mínimos sucessivos. A região do máximo central estendida até o primeiro mínimo contém mais de 90% da intensidade total.

3.2 Difração por Fenda Dupla

Se considerarmos agora novamente uma fenda dupla, mas com fendas de tamanho a não desprezível, temos que o efeito de interferência das duas fendas se sobrepõe à difração de cada fenda individual. Desta forma, o padrão de interferência/difração será dado por

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \cos^2(\delta/2) \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad \text{onde} \quad \delta = kd \sin \theta \quad \text{e} \quad \beta = ka \sin \theta \quad (\text{Fenda Dupla}) \quad (3.13)$$

Neste caso temos mínimos de interferência ($\delta/2 = (m+1/2)\pi$) e mínimos de difração ($\beta/2 = m\pi$) que se superpõem. Normalmente $d > a$, portanto o espaçamento de mínimos de interferência ($\Delta\theta_{\text{int}} \sim \lambda/d$) são menores que o espaçamento de mínimos de difração ($\Delta\theta_{\text{dif}} \sim \lambda/a$). Assim o padrão de difração acaba servindo como um envelope ao padrão de interferência. Este padrão resultante de interferência/difração está mostrado na Fig 3.12.

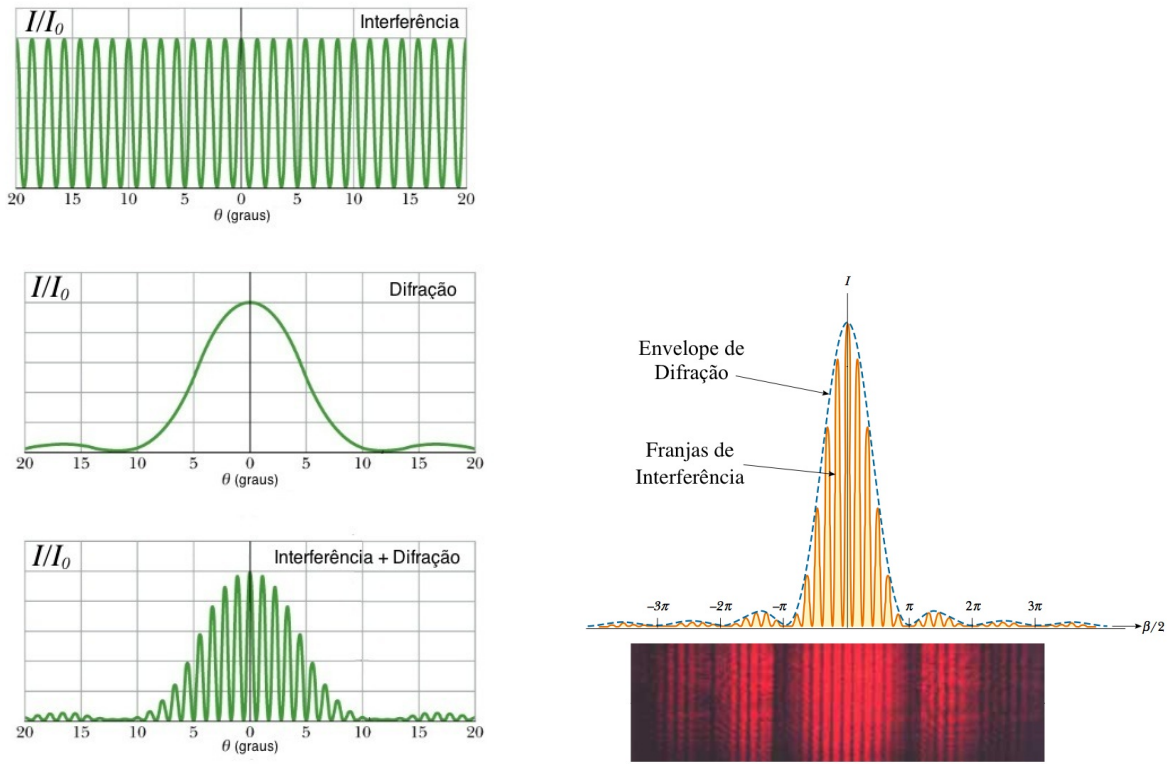


Figura 3.6: Padrão de *Interferência* e *Difração* das ondas que passam por duas fendas. (Serway)

3.3 Difração por Fenda Retangular

No caso de uma fenda com abertura angular no plano xy , precisamos percorrer todos os pontos do plano ocupado pela fenda. Lembre que para uma fenda unidimensional no eixo x , tínhamos

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x x} dx \quad (3.14)$$

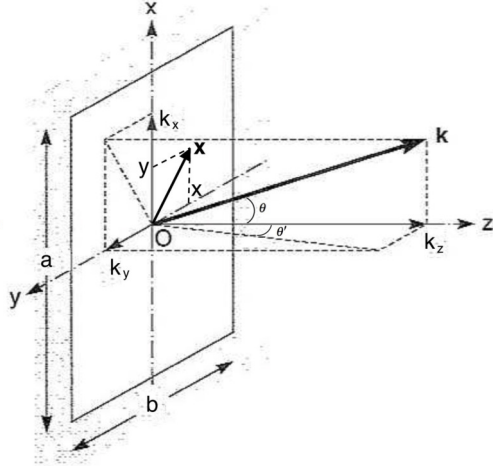


Figura 3.7: Difração por uma fenda retangular de larguras a e b . (Moysés)

Podemos generalizar esse resultado para uma fenda retangular no plano xy com comprimento a no eixo x e comprimento b no eixo y :

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta, \theta')}{v(0, 0)} &= \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x x} dx \right) \left(\frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y} dy \right) \\ &= \frac{1}{ab} \iint dxdy e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Note que ab é a área da fenda e estamos integrando nos pontos $\vec{x}$ do plano xy cobrindo essa área.

Podemos imaginar uma fenda bidimensional de formato qualquer com área A como uma série de retângulos infinitesimais, obtendo assim a generalização

$$\frac{v(\theta, \phi)}{v(0, 0)} = \frac{1}{A} \iint dA e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{Fenda Bidimensional}) \quad (3.16)$$

Para detalhes sobre esse resultado, veja Moysés Vol. 4, Eq. 4.37. No caso da fenda retangular, a integral dupla se separa em duas integrais idênticas (em x e y), portanto

$$\begin{aligned} \frac{v(\theta, \theta')}{v(0, 0)} &= \left(\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_x x} dx \right) \left(\frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_y y} dy \right) \\ \frac{v(\theta, \theta')}{v(0, 0)} &= \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \frac{\sin(\gamma/2)}{\gamma/2} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\beta = ka \sin \theta \quad \text{e} \quad \gamma = kb \sin \theta' \quad (3.18)$$

Finalmente, como $I = |v|^2$, temos

$$\frac{I(\theta, \theta')}{I_0} = \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \left(\frac{\sin(\gamma/2)}{\gamma/2} \right)^2 \quad \text{onde } \beta = ka \sin \theta \text{ e } \gamma = kb \sin \theta' \quad (\text{Difração, Fenda Retangular}) \quad (3.19)$$

3.4 Difração por Fenda Circular

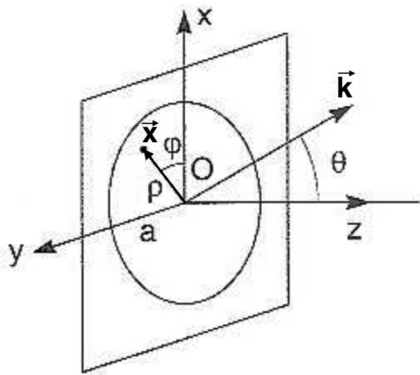


Figura 3.8: Difração por uma fenda circular de raio a . (Moysés)

Neste caso, com uma fenda circular de raio a e área $A = \pi a^2$, podemos usar coordenadas esféricas usuais, sendo as coordenadas polares (ρ, ϕ) no plano da fenda, e θ representa o ângulo azimutal. Dada a simetria no eixo z , podemos tomar k no plano xz sem perder generalidade. Assim:

$$\vec{k} = k\hat{u}, \quad (3.20)$$

$$\hat{u} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (3.21)$$

$$\vec{x} = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, 0) \quad (3.22)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k\rho \sin \theta \cos \phi \quad (3.23)$$

$$dA = \rho d\rho d\phi \quad (3.24)$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{1}{A} \iint dA e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi e^{-ik\rho \sin \theta \cos \phi}\end{aligned}\quad (3.25)$$

A função de Bessel de ordem zero pode ser expressa como

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-ix \cos \phi} \quad (3.26)$$

ou seja

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{-ik\rho \sin \theta \cos \phi} = 2\pi J_0(k\rho \sin \theta) \quad (3.27)$$

E portanto

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \rho d\rho 2\pi J_0(k\rho \sin \theta) \quad (3.28)$$

Fazendo $u = k\rho \sin \theta$, $du = k \sin \theta d\rho$, temos

$$\begin{aligned}\frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{ka \sin \theta} \frac{u}{k \sin \theta} \frac{du}{k \sin \theta} 2\pi J_0(u) \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \frac{2\pi}{(k \sin \theta)^2} \int_0^{ka \sin \theta} u du J_0(u) \\ &= \frac{2}{(ka \sin \theta)^2} \int_0^{ka \sin \theta} u du J_0(u)\end{aligned}\quad (3.29)$$

Mas, $J_0(x)$ se relaciona com $J_1(x)$ via

$$xJ_1(x) = \int_0^x u J_0(u) du \quad (3.30)$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{v(\theta)}{v(0)} &= \frac{2}{(ka \sin \theta)^2} (ka \sin \theta) J_1(ka \sin \theta) \\ &= 2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}\end{aligned}\quad (3.31)$$

Finalmente, como $I = |v|^2$, temos

$$\boxed{\frac{I(\theta)}{I_0} = 4 \left[\frac{J_1(\beta)}{\beta} \right]^2 \quad \text{onde } \beta = ka \sin \theta}$$

(Difração, Fenda Circular)

(3.32)

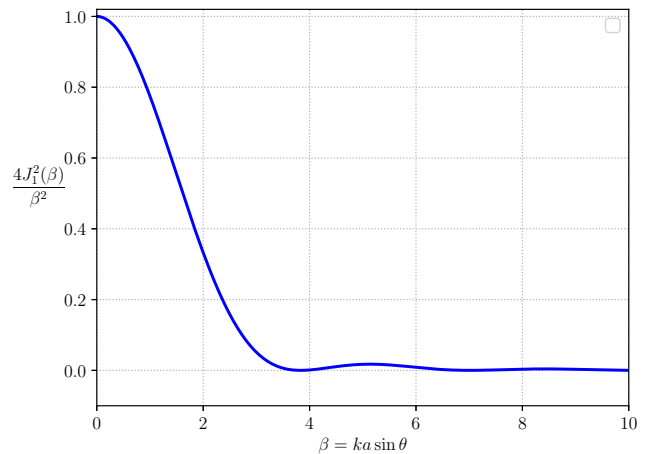
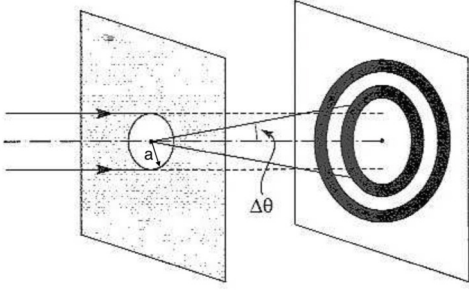


Figura 3.9: Padrão de intensidade na difração em uma fenda circular. Primeiro mínimo ocorre em $\beta = 1.22\pi$.



O primeiro mínimo da intensidade ocorre em

$$\beta_{\min} = ka \sin \theta_{\min} = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta_{\min} = 1.22\pi \approx 3.83 \quad (3.33)$$

Portanto, para pequenas aberturas

$$\theta_{\min} \approx \sin \theta_{\min} \approx 0.61 \frac{\lambda}{a} \quad (3.34)$$

Figura 3.10: Padrão de intensidade na difração em uma fenda circular. Primeiro mínimo ocorre em $\beta = 1.22\pi$. (Moysés)

O máximo central contém 84% da intensidade total difratada. Se tivermos luz proveniente de 2 objetos distintos atrás da fenda, cada um irá produzir seu padrão de difração.

Será possível distinguir 2 objetos se o máximo de um deles estiver a uma distância maior que o primeiro mínimo do outro. Assim, temos um poder de resolução espacial dentro da separação angular

$$\Delta\theta \approx \theta_{\min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (3.35)$$

onde $D = 2a$ é o diâmetro da abertura circular. Objetos mais próximos do que essa separação angular serão misturados no máximo central.

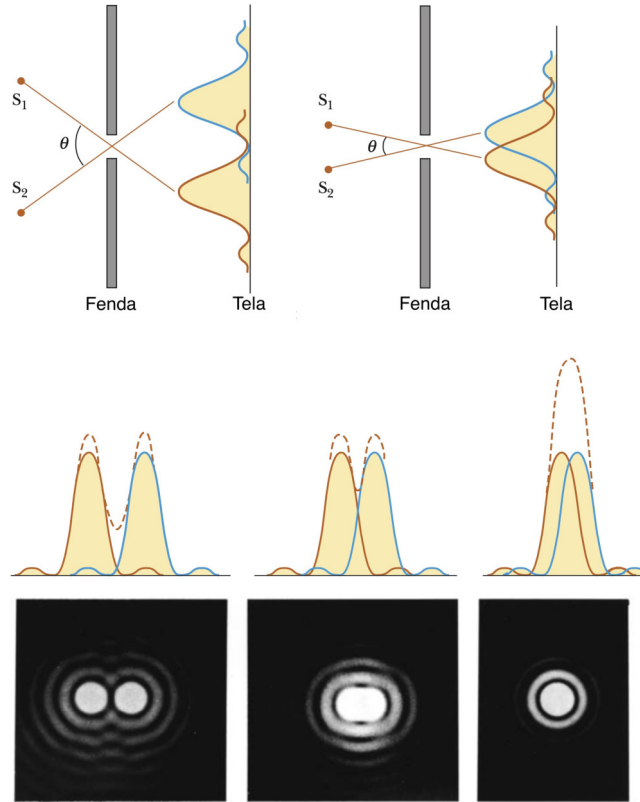


Figura 3.11: Padrão de difração de 2 fontes S_1 e S_2 . Para fontes com separações angulares $\Delta\theta > 1.22 \lambda/2a$, podemos distinguir as duas fontes. Fontes com separação menor serão confundidas/misturadas. (Serway)

3.5 Difração de Raio X

Para medir o comprimento de onda λ de uma onda eletromagnética via difração, precisa-se saber a abertura do aparato de difração a , que deve ser da ordem de λ . Raios-x tem um comprimento de onda bem pequeno, da ordem de $\lambda \approx 0.1$ nm, e seria impossível construir aberturas de difração deste tamanho. Entretanto, o espaçamento atômico em cristais é da ordem de 0.1 nm, ou seja $a \approx \lambda_{\text{raio-x}}$. Como esse espaçamento é regular, pode servir como uma rede de difração/espalhamento.

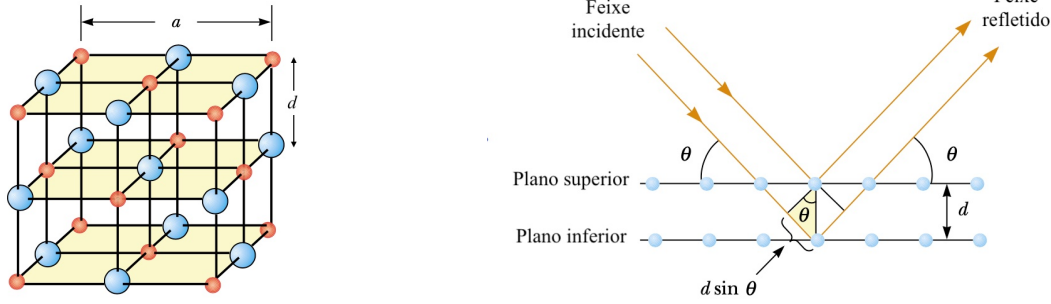


Figura 3.12: Um cristal de NaCl tem uma estrutura tridimensional como mostrada à esquerda, com camadas de átomos de Na e Cl separadas por uma distância d . Um feixe de raio-x incidente se espalha em camadas adjacentes e interfere construtivamente se a diferença de caminho entre os raios for um múltiplo do comprimento de onda. (Serway)

Neste caso, a difração é na verdade um espalhamento/reflexão da radiação após colidir com átomos em moléculas localizadas em planos/camadas subsequentes. Os raios espalhados/refletidos interferem de tal maneira que máximos são produzidos quando a diferença de caminho é um múltiplo do comprimento de onda do raio-x.

Considere um feixe de raio-x incidente a um ângulo θ com a superfície do material. Um raio 1 se reflete em um átomo de um plano superior. Um raio 2 se reflete em um átomo no plano imediatamente inferior e, comparado ao raio 1, percorre uma distância extra $d \sin \theta$ antes de refletir e essa mesma distância após refletir. Assim, para haver interferência construtiva, devemos ter

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Lei de Bragg}) \quad (3.36)$$

Note que um raio 3 se refletindo num plano ainda mais inferior, teria uma distância $2d \sin \theta$ com respeito ao raio 2 e $4d \sin \theta$ com respeito ao raio 1. Portanto, se a condição acima para raios 1 e 2 for satisfeita, ela também será para raios 1,2,3, etc.

Medindo o ângulo de espalhamento θ , pode-se determinar a distância d , caso se saiba o comprimento de onda λ .

