Capítulo 4

Relatividade Especial

4.1 Postulados

As Equações de Ondas Eletromagnéticas no vácuo tem uma velocidade de propagação c *constante*:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.1}$$

onde $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$ é uma constante universal da natureza.

Questões que surgem:

1: Com respeito a que referencial c deve ser medida?
2: Como explicar efeitos tais como o desaparecimento de forças magnéticas em um sistema de referência que se move junto com a carga?

Estas questões motivaram o desenvolvimento da relatividade especial, que resolve esses problemas e muda nossos conceitos clássicos de espaço e tempo, requerendo apenas dois postulados (na verdade, apenas um):

Postulado 1: As Leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
Postulado 2: A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.

A constância de c segue do postulado 1, pois o Eletromagnetismo é um conjunto de leis da Física para as quais deve-se ter $c = \text{const}$. Portanto, o postulado 2 é consequência do postulado 1.

4.2 Relatividade da Simultaneidade

O conceito de simultaneidade é fundamental quando se fala em medidas de tempo e comparações de medidas de tempo em diferentes sistemas.

4.2.1 Sincronização

Para definir simultaneidade, é preciso falar de relógios sincronizados. Vamos imaginar que em um sistema de referência inercial S, cada ponto espacial tenha um relógio que faz a medida do tempo

de um evento que ocorre naquele ponto. Em princípio devemos sincronizar todos esses relógios para que estejam marcando o mesmo tempo nesse sistema de referência.

Como sincronizar tais relógios? Um critério é o seguinte: Para sincronizar 2 relógios quaisquer separados por uma distância L, quando o relógio 1 marca um tempo t_1, ele envia um raio de luz na direção do relógio 2. Ao receber o raio de luz, o relógio 2 deverá ser ajustado para marcar o tempo $t_2 = t_1 + L/c$. Desta forma, os 2 relógios estarão sincronizados, e podemos sincronizar qualquer outro relógio pelo mesmo procedimento. Podemos imaginar que em cada sistema de referência temos esses infinitos relógios que foram sincronizados por esse procedimento.

4.2.2 Simultaneidade

Com relógios sincronizados, podemos falar em eventos simultâneos: Se um evento 1 ocorre em P1 no instante t_1, emitindo um raio de luz nesse instante, e o mesmo vale para um evento 2 que ocorre em P2 no instante t_2, os eventos são simultâneos ($t_1 = t_2$) quando o ponto de encontro dos dois raios de luz é o ponto médio do segmento P1P2.

O postulado de que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial inercial implica que eventos simultâneos em um sistema de referência inercial S não podem ser simultâneos em outro sistema S′ que se move com velocidade v com respeito a S. Isso então implicará que os tempos medidos nos dois sistemas inerciais S e S′ serão distintos para o mesmo evento.

Considere um trem de comprimento L que está se movendo com velocidade v para a direita no eixo x, quando visto de um referencial S. Um referencial S′ se move junto com o trem com velocidade v relativamente a S, e portanto vê o trem em repouso.

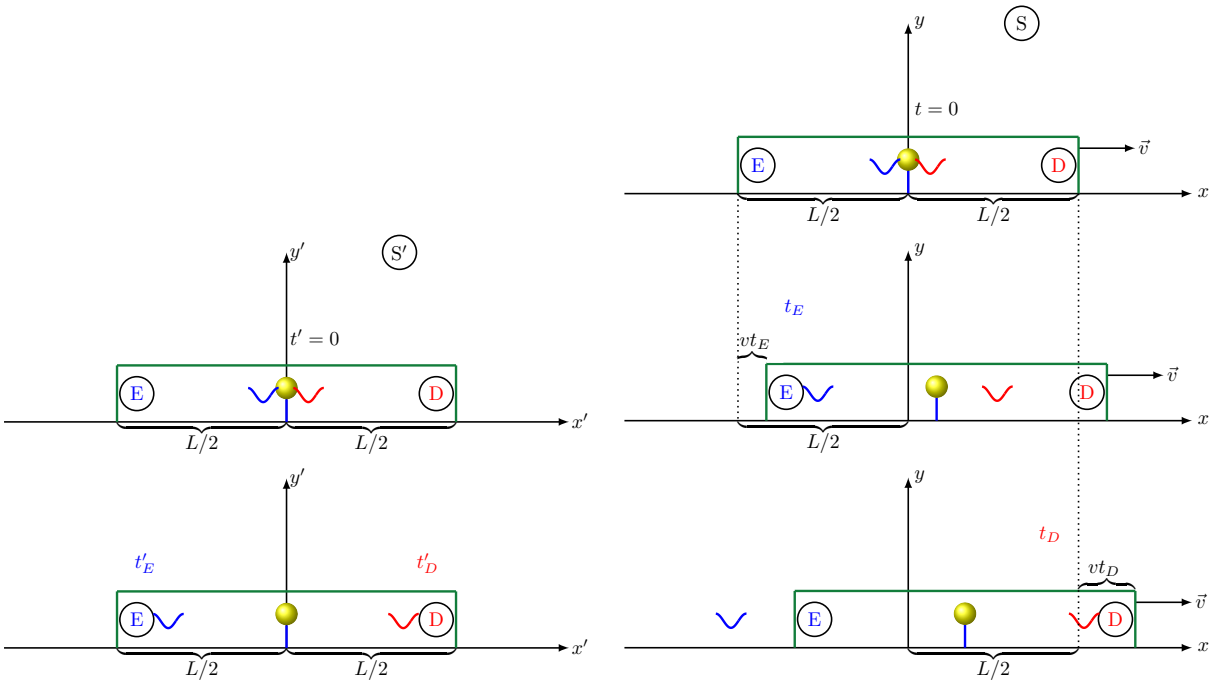


Figura 4.1: Uma fonte localizada no centro de um trem, emite 2 raios de luz em direções opostas, que são detectados por observadores E e D. Em S′, que se move junto com o trem, os eventos de detecção são simultâneos. Já em S, que vê o trem se mover com velocidade $\vec{v}$ para a direita, o observador E detecta o raio primeiro, ou seja $t_E < t_D$.

No instante $t = t' = 0$ os dois referenciais coincidem, ou seja $x = x' = 0$. Neste mesmo instante

inicial, dois raios de luz são emitidos em direções opostas por uma fonte localizada na origem de S′. Um dos raios viaja para a direita (raio vermelho) e o outro para a esquerda (raio azul). Dois observadores, no início e no final do trem (E e D) detectam esses raios de luz.

No sistema S′, o trem está parado. Desta forma, ambos os raios percorrem uma distância $L/2$ antes de serem detectados no tempo $t'_E = t'_D$. Como a velocidade da luz é c, temos

$$t'_E = t'_D = \frac{L}{2c} \tag{4.2}$$

Ou seja, em S′, os eventos de observação dos raios de luz da direita e da esquerda são simultâneos.

Já no sistema S, o trem está se movendo para a direita. O observador da esquerda está se aproximando da posição inicial da fonte (origem O). Ele detecta o raio de luz no tempo t_E. Neste tempo, o trem de deslocou para a direita de vt_E. Portanto a distância percorrida pela luz foi de $L/2 - vt_E$. Mas a luz viaja com velocidade c, de forma que essa distância também é ct_E, ou seja

$$\begin{aligned} ct_E &= \frac{L}{2} - vt_E \\ (c+v)t_E &= \frac{L}{2} \\ t_E &= \frac{L}{2(c+v)} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Já o observador da direita está se afastando da posição inicial da fonte (origem O). Ele detecta o raio de luz no tempo t_D. Neste tempo, o trem de deslocou para a direita de vt_D. Portanto a distância percorrida pela luz foi de $L/2 + vt_D$, que também deve ser ct_D, ou seja

$$\begin{aligned} ct_D &= \frac{L}{2} + vt_D \\ (c-v)t_D &= \frac{L}{2} \\ t_D &= \frac{L}{2(c-v)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

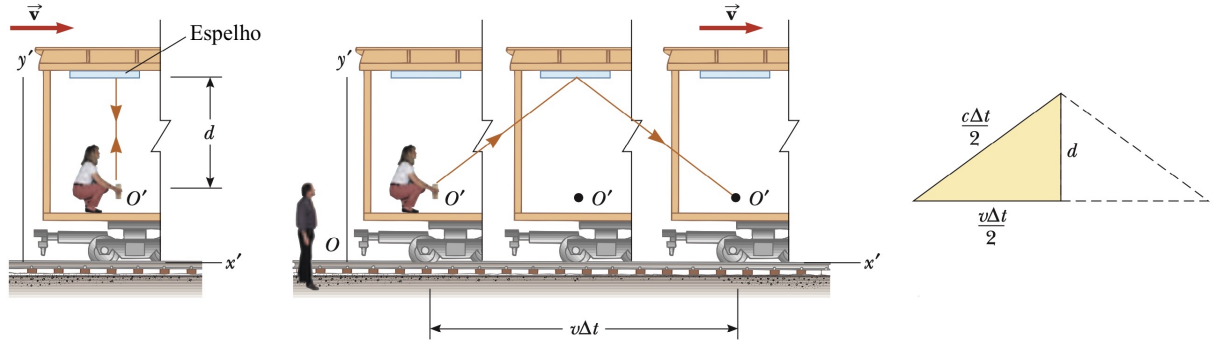
Portanto, em S, os dois eventos não são simultâneos, $t_D > t_E$ porque a luz viaja uma distância maior indo pra direita. Podemos inclusive calcular a diferença de tempo entre os eventos neste referencial:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_D - t_E \\ &= \frac{L}{2(c-v)} - \frac{L}{2(c+v)} \\ &= \frac{L}{2}\left[\frac{c+v-(c-v)}{(c-v)(c+v)}\right] \\ &= \frac{L}{2}\left[\frac{2v}{(c^2-v^2)}\right] \\ &= \frac{L}{2}\left[\frac{2v}{c^2(1-v^2/c^2)}\right] \\ &= \frac{L}{c}\left[\frac{v/c}{(1-v^2/c^2)}\right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

Note que a sincronização de relógios em um sistema S ocorre porque a velocidade da luz é finita. Já a relatividade da simultaneidade (e a dilatação temporal que veremos a seguir), ocorre não apenas porque a velocidade da luz é finita, mas porque ela é a mesma em todos os referenciais.

4.3 Dilatação do Tempo

Considere um trem onde se emite um raio de luz para o teto to trem, onde um espelho reflete o raio de volta ao ponto de emissão.



(a) (b) (c)

Figura 4.2: Um raio de luz é emitido e refletido em um espelho. (a) No referencial S′, o trem está parado, e o raio de luz percorre uma distância $c\Delta t' = 2d$ para retornar à origem $x' = 0$. (b) Já em S, o raio percorre uma distância $c\Delta t = 2L$. (c) Temos que $2L = c\Delta t = 2\sqrt{d^2 + (v\Delta t)/2^2} > 2d$. Como a velocidade da luz é c em ambos os referenciais, $\Delta t > \Delta t'$ (dilatação do tempo em S). Do ponto de vista de S, o relógio em S′, que está em movimento, passa mais devagar. *"Moving clocks run slower"*.

Do ponto de vista de S′, o trem está parado e o raio percorre uma distância d até o espelho e retorna a mesma distância. Portanto

$$\begin{aligned} c\Delta t' &= 2d \\ \Delta t' &= \frac{2d}{c} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Já do ponto de vista de S, o trem se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{x}$ junto com o sistema S′. Assim, em S, a luz percorre uma distância diagonal L até se refletir no espelho, e essa mesma distância de volta. Note que em S′ os eventos de emissão e retorno eram no mesmo ponto $x' = 0$ (*tempo próprio*), mas em S eles ocorrem em posições diferentes, i.e. $x = 0$ e $x = v\Delta t$.

Da figura, temos que

$$\begin{aligned} L^2 = \frac{c^2\Delta t^2}{4} &= d^2 + \frac{v^2\Delta t^2}{4} \\ \frac{c^2\Delta t^2}{4}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= d^2 \\ \Delta t &= \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Como $\Delta t' = 2d/c$, temos

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.8}$$

Vamos definir

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}} \tag{4.9}$$

e

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} \tag{4.10}$$

Note que $v < c$, portanto $\beta < 1$ e $\gamma > 1$. Temos então

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t'} \qquad \text{(Dilatação do tempo)} \tag{4.11}$$

4.4 Contração do Espaço

Considere um trem que está se movendo com velocidade v para a direita no eixo x, quando visto de um referencial S. Um referencial S′ se move junto com o trem com velocidade v e portanto vê o trem em repouso. No referencial S′, o comprimento do trem é medido como L_0, seu *comprimento próprio* (medido em repouso). Veja Fig. 4.3.

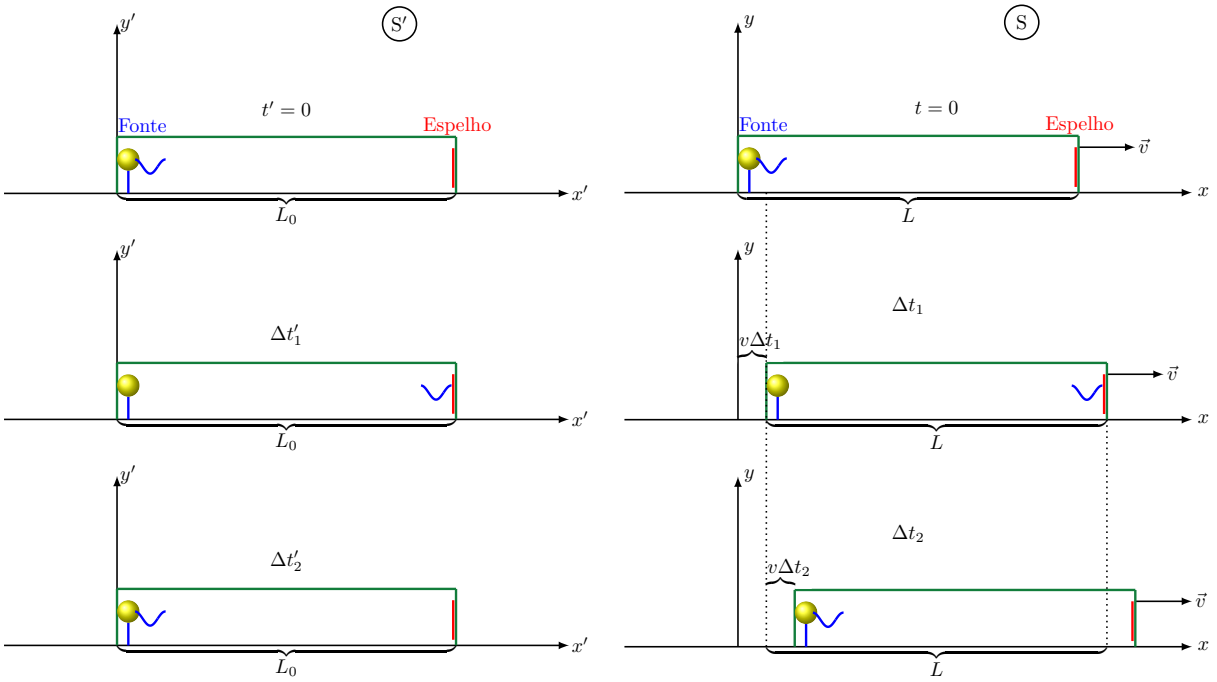


Figura 4.3: Uma fonte localizada à esquerda de um trem, emite 1 raio de luz para a direita, que é refletido em um espelho e retorna à fonte. Em S′, que se move junto com o trem, o trem tem um comprimento L_0 e o tempo total para o raio retornar é $2L_0/c$. Já em S, que vê o trem se mover com velocidade $\vec{v}$ para a direita, o trem tem um comprimento L e o raio percorre uma distância maior que L na ida ao espelho e menor do que L no retorno à fonte. Encontramos que $L < L_0$. *"Moving rods become shorter"*.

No instante $t = t' = 0$ os dois referenciais coincidem, ou seja $x = x' = 0$. Neste mesmo instante inicial, um raio de luz é emitido para a direita por uma fonte localizada na origem O′. O raio de luz é refletido por um espelho no final do trem e retorna à fonte.

No sistema S′, o trem está parado. Desta forma, o raio percorre uma distância L_0 até ser refletido em um tempo $\Delta t'_1$. Após ser refletido, ele demora um tempo adicional $\Delta t'_2$ para retornar à fonte. Como a velocidade da luz é c, temos

$$\Delta t'_1 = \Delta t'_2 = \frac{L_0}{c} \tag{4.12}$$

Portanto, o intervalo de tempo total $\Delta t'$ entre os eventos de emissão e recebimento do raio de luz (eventos que ocorrem no mesmo ponto em S$'$, a origem $x' = 0$) é dado por

$$\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 = \frac{2L_0}{c} \tag{4.13}$$

Já no sistema S, o trem está se movendo para a direita. O espelho está se afastando da posição inicial da fonte (origem O). O raio de luz demora um tempo Δt_1 para ser refletido pelo espelho. Neste tempo, o trem de deslocou para a direita de $v\Delta t_1$. Portanto, a distância percorrida pela luz foi de $L + v\Delta t_1$. Mas a luz viaja com velocidade c, de forma que essa distância também é dada por $c\Delta t_1$, ou seja

$$\begin{aligned} c\Delta t_1 &= L + v\Delta t_1 \\ (c-v)\Delta t_1 &= L \\ \Delta t_1 &= \frac{L}{(c-v)} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Após o raio ser refletido, a fonte está agora se aproximando, e o raio demora um tempo Δt_2 para retornar à fonte. Neste tempo, o trem de deslocou para a direita de uma distância adicional $v\Delta t_2$. Portanto a distância percorrida pela luz no retorno foi de $L - v\Delta t_2$, que também deve ser $c\Delta t_2$, ou seja

$$\begin{aligned} c\Delta t_2 &= L - v\Delta t_2 \\ (c+v)\Delta t_2 &= L \\ \Delta t_2 &= \frac{L}{(c+v)} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Portanto, em S, o intervalo de tempo total Δt entre os eventos de emissão e recebimento do raio de luz (eventos que não ocorrem no mesmo ponto espacial em S) é dado por

$$\begin{aligned} \Delta t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ &= \frac{L}{(c-v)} + \frac{L}{(c+v)} \\ &= L\left[\frac{c+v+(c-v)}{(c-v)(c+v)}\right] \\ &= L\left[\frac{2c}{(c^2-v^2)}\right] \\ &= L\left[\frac{2c}{c^2(1-v^2/c^2)}\right] \\ &= \frac{2L}{c}\left[\frac{1}{(1-v^2/c^2)}\right] \qquad \text{use } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \gamma^2\frac{2L}{c} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Mas pela dilatação do tempo, temos $\Delta t = \gamma\Delta t'$ e vimos acima que $\Delta t' = 2L_0/c$. Portanto

$$\begin{aligned} \Delta t &= \gamma\Delta t' \\ \gamma^2\frac{2L}{c} &= \gamma\frac{2L_0}{c} \end{aligned} \tag{4.17}$$

ou seja

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}} \qquad \text{(Contração do Espaço)} \tag{4.18}$$

Como $\gamma > 1$, temos $L < L_0$, i.e. o comprimento em S é menor do que em S′ (contração do espaço).

Se a velocidade da luz fosse infinita, teríamos $v/c = 0$, $\gamma = 1$: não haveria dilatação do tempo ou contração do espaço.

4.5 Transformações de Lorentz

4.5.1 Transformações de Galilleu

Considere um sistema de referência inercial S que faz medidas de tempo e posição (t, x, y, z) para um certo evento P. Suponha que um sistema S′ está se movendo com velocidade $\vec{v}$ na direção x com respeito ao sistema S. Em S′, se faz medidas (t', x', y', z') para o mesmo evento. Suponha que no instante $t = t' = 0$ as origens do sistemas coincidem, i.e. O=O′. No contexto da mecânica clássica, essas coordenadas de espaço e tempo nos dois sistemas estão relacionadas pelas chamadas transformações de Galileu:

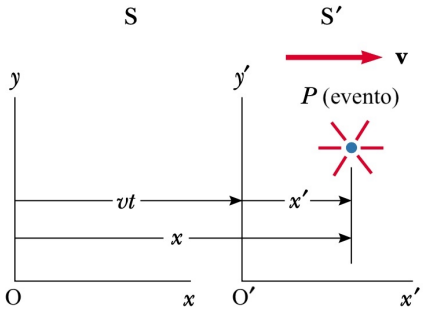


Figura 4.4: Evento P ocorre com coordenadas (t, x, y, z) no sistema S. Em S′, que se move com velocidade $\vec{v}$ na direção x com respeito a S, o evento é medido com coordenadas (t', x', y', z'). (Serway)

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \qquad \text{(Transformação de Galileu)} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}} \tag{4.19–4.22}$$

Basicamente o tempo absoluto passa da mesma forma em ambos os sistemas, e a posição no eixo x é alterada pela velocidade relativa. Note que as velocidades $V_x = dx/dt$ e $V'_x = dx'/dt'$ são relacionadas via

$$\boxed{\begin{aligned} V'_x &= V_x - v \\ V'_y &= V_y \qquad \text{(Transformação de Galileu)} \\ V'_z &= V_z \end{aligned}} \tag{4.23–4.25}$$

As transformações inversas (de S′ para S) são dadas por

$$\begin{aligned} t &= t' && (4.26)\\ x &= x' + vt' \qquad \text{(Transformação de Galileu - Inversa)} && (4.27)\\ y &= y' && (4.28)\\ z &= z' && (4.29) \end{aligned}$$

e para as velocidades

$$\begin{aligned} V_x &= V'_x + v && (4.30)\\ V_y &= V'_y \qquad \text{(Transformação de Galileu - Inversa)} && (4.31)\\ V_z &= V'_z && (4.32) \end{aligned}$$

Entretanto, essas transformações não são consistentes com os postulados da relatividade especial. Em particular, é impossível ter a velocidade da luz sendo a mesma em ambos os sistemas de referência com as transformações de Galileu. Sendo assim, precisamos descobrir novas transformações que imponham a constância da velocidade da luz em ambos os referenciais inerciais. Essas são as chamadas Transformações de Lorentz.

4.5.2 Considerações Gerais sobre as Tranformações de Lorentz

Linearidade

A transformação entre coordenadas de S e S′ deve ser *linear* para garantir invariância por translações espaciais e temporais. A transformação linear entre coordenadas de espaço e tempo mais geral que pode ser escrita é dada por

$$t' = a_{00}t + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \tag{4.33}$$
$$x' = a_{10}t + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \tag{4.34}$$
$$y' = a_{20}t + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \tag{4.35}$$
$$z' = a_{30}t + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \tag{4.36}$$

A transformação só pode ser *linear*, porque se houvesse por exemplo um termo do tipo $x' = ax^2$, o comprimento de um objeto dependeria de sua posição espacial, o que violaria a homogeneidade espacial. Por exemplo, considere um objeto com uma ponta em $x_1 = 1$ e outra em $x_2 = 3$, portanto com comprimento $\Delta x = x_2 - x_1 = 2$ quando medido em S. Tal objeto teria coordenadas $x'_1 = a$ e $x'_2 = 9a$, portanto teria comprimento $\Delta x' = 9a - a = 8a$ em S′. Se esse mesmo objeto fosse deslocado para $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$, ele ainda teria $\Delta x = 6 - 4 = 2$. Entretanto, em S′, teria $x'_1 = 16a$ e $x_2 = 36a$, portanto $\Delta x' = 36a - 16a = 20a$, violando a homogeneidade espacial. Da mesma forma $t' = ax^2 + bt^2$ faria intervalos de tempo dependerem do ponto espacial e do instante medido.

Um outro motivo pra impor uma transformação linear é que, pelo princípio da relatividade, os sistemas S e S′ são equivalentes, portanto o que um concluir a respeito do outro deve ser válido do outro com respeito ao primeiro. Assim, a transformação de S para S′ e a inversa de S′ para S devem ser a mesma, exceto pela mudança $v \to -v$. Se tivéssemos $x' \propto x^2$, então a inversa seria algo do tipo $x \propto \sqrt{x'}$, violando o princípio de relatividade. A única transformação que preserva forma de um sistema a outro quando invertida é a transformação linear.

Coordenadas perpendiculares ao movimento

Entretanto, para movimento no eixo x, a transformação linear geral acima deve se simplificar muito. Em particular, nas direções perpendiculares ao movimento, não esperamos que haja mistura de coordenadas, portanto devemos continuar a ter $y' = y$ e $z' = z$. Por exemplo, pontos de eventos no eixo x (i.e. $y = z = 0$), devem ser mapeados em pontos no eixo x' (i.e. $y' = z' = 0$). Afinal de contas, a velocidade é em x, e não haveria motivo para o evento ter alguma coordenada y': ela seria positiva ou negativa? Qualquer possibilidade quebraria a simetria. Aplicando isso na Eq. para y', temos que para eventos no eixo x:

$$0 = a_{20}t + a_{21}x \quad (y = z = 0 \to y' = z' = 0) \tag{4.37}$$

Isso deve ser verdade, em particular, no instante $t = 0$, o que implica

$$a_{21} = 0 \tag{4.38}$$

Similarmente, isso deve ocorrer também em $x = 0$, o que implica

$$a_{20} = 0 \tag{4.39}$$

Assim, nos resta

$$y' = a_{22}y + a_{23}z \tag{4.40}$$

Agora note que pontos no plano xz (i.e. $y = 0$) devem ser mapeados em pontos no plano $x'z'$ (i.e. $y' = 0$). Afinal, se y' não for zero, seria positivo ou negativo? Qualquer possibilidade quebraria a simetria, já que a velocidade de afastamento dos sistemas é no eixo x apenas. Desta forma, temos para a Eq. acima:

$$0 = y' = a_{23}z \tag{4.41}$$

o que implica

$$a_{23} = 0 \tag{4.42}$$

Desta forma, nos resta apenas

$$y' = a_{22}y \tag{4.43}$$

Suponha agora que posicionamos um barra vertical ao longo do eixo y na origem dos dois sistemas em $x = x' = 0$ no instante $t = t' = 0$. Suponha que em S, medimos um comprimento $y = \ell$, portanto em S$'$ deveríamos medir $y' = a_{22}\ell$. No entanto, do ponto de vista de S$'$, é S que se move com velocidade $-v$, portanto a transformação inversa (que seria idêntica à direta) deveria valer de forma que $y = a_{22}y'$. Teríamos então que $y = a_{22}y' = a_{22}(a_{22}\ell) = a_{22}^2\ell = \ell$. Ou seja, $a_{22} = \pm 1$. Como a transformação deve se reduzir à identidade quando $v = 0$, a única possibilidade é ter

$$a_{22} = 1 \tag{4.44}$$

de forma que $y' = y$. Exatamente os mesmos argumentos podem ser feitos usando a equação para z' para concluir que $z' = z$.

Tempo e Coordenada na direção do movimento

Por outro lado, nas coordenadas x e t, esperamos descrever os fênomeos de contração espacial e dilatação temporal. A velocidade relativa v quebra a simetria na direção x (o que ocorre mesmo nas Transformações de Galileu), e sabemos que agora não teremos mais o tempo universal em ambos os sistemas. Além disso, quando $v \ll c$, esperamos re-obter as Transformações de Galileu.

Na equação de t', não devemos ter dependência em y ou z, pois isso implicaria que relógios posicionados simetricamente em $y = 1$ e $y = -1$ mediriam tempos diferentes em S$'$. Como a velocidade ocorre apenas em x, isso quebraria a simetria. Desta forma, devemos ter

$$a_{02} = a_{03} = 0 \tag{4.45}$$

Da mesma forma, na equação de x', não devemos ter dependência em y ou z, pois isso implicaria que eventos simétricos ocorrendo em $y = 1$ e $y = -1$ e com as demais coordenadas idênticas teriam medidas de x' distintas. Assim,

$$a_{12} = a_{13} = 0 \tag{4.46}$$

Desta forma, estamos buscando alguma transformação do tipo

$$t' = At + Bx \tag{4.47}$$
$$x' = Ct + Dx \tag{4.48}$$
$$y' = y \tag{4.49}$$
$$z' = z \tag{4.50}$$

4.5.3 Derivação das Tranformações de Lorentz Via Contração do Espaço

Considere um evento medido em S′ com coordenadas (x', t'), e quando medido no sistema S tem coordenadas (x, t). Sabemos que a origem O′ do sistema de coordenadas S′ se move com velocidade v com respeito a S, portanto no tempo t, temos que O′ estará na coordenada vt quando visto de S. Por outro lado, o comprimento x' medido em S′ será contraído para x'/γ quando visto de S. Desta forma, a posição x medida em S para esse evento deve ser:

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt \tag{4.51}$$

ou seja, invertendo

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{4.52}$$

Agora note que, do ponto de vista de S′, é o sistema S que se move para a esquerda com velocidade $-\vec{v}$. Desta forma, como nenhum dos sistemas tem nenhum privilégio, a transformação inversa equivalente da equação acima deve ser

$$x = \gamma(x' + vt')\,. \tag{4.53}$$

Vamos assumir, no entanto, que não sabemos da contração espacial e nem quem é o fator γ acima, e usar o princípio da universalidade da velocidade da luz para determiná-lo. Note que a Eq. 4.52 basicamente assume que a mudança de coordenadas de Galileu se mantém a menos de um fator γ a ser determinado. Sabemos que a relação entre coordenadas deve ser *linear* para preservar homogeneidade no espaço e no tempo, então vamos partir de:

$$x' = Ct + Dx \tag{4.54}$$

para C e D constantes a serem determinadas. Mas como a origem de S′ localizada em $x' = 0$ deve ter coordenada $x = vt$ para S, temos

$$0 = x' = Ct + Dx = Ct + D(vt) \quad \rightarrow \quad C = -Dv \tag{4.55}$$

Portanto $x' = -Dvt + Dx = D(x - vt)$, e a constante D é simplesmente o fator γ a ser determinado na Eq. 4.52.

Para determinar γ, vamos considerar um evento especial. Vamos supor que em $x = x' = 0$ e $t = t' = 0$, ou seja, quando S e S′ coincidem, um raio de luz é emitido na direção x. Ambos os sistemas medem a mesma velocidade da luz c para esse raio, portanto após um tempo t medido em S e t' medido em S′, o raio de luz estará em x e x', respectivamente, onde

$$x = ct \qquad \text{e} \qquad x' = ct' \tag{4.56}$$

Multiplicando a Eq. 4.52 pela Eq. 4.53, temos

$$\begin{aligned} xx' &= \gamma(x - vt)\gamma(x' + vt') \\ &= \gamma^2(xx' + xvt' - x'vt - v^2tt') \end{aligned} \tag{4.57}$$

Dividindo por xx', temos

$$1 = \gamma^2 \left(1 + v\frac{t'}{x'} - v\frac{t}{x} - v^2\frac{t}{x}\frac{t'}{x'}\right) \tag{4.58}$$

Como $t/x = 1/c$ e $t'/x' = 1/c$, temos

$$1 = \gamma^2 \left(1 + \frac{v}{c} - \frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{4.59}$$

ou seja

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{4.60}$$

ou seja, de fato γ é o fator de contração espacial. Agora, inserindo a Eq. 4.52 para x' na Eq. 4.53 para x, temos

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ &= \gamma[\gamma(x - vt) + vt'] \\ &= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \end{aligned} \tag{4.61}$$

Isolando t', temos

$$\gamma vt' = \gamma^2 vt + (1 - \gamma^2)x \tag{4.62}$$

ou ainda

$$t' = \gamma t + \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma v}x \tag{4.63}$$

Mas

$$1 - \gamma^2 = 1 - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -\frac{v^2}{c^2}\gamma^2 \tag{4.64}$$

Portanto

$$\frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma v} = -\gamma\frac{v}{c^2} \tag{4.65}$$

E assim

$$t' = \gamma t - \gamma\frac{v}{c^2}x = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{4.66}$$

Nas direções y e z, as coordenadas dos eventos não mudam, pois o sistema S$'$ se move na direção x. Desta forma, dadas as coordenadas (t, x, y, z) medidas no referencial S, as coordenadas (t', x', y', z') medidas em S$'$ são dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \\ x' &= \gamma(x - vt) \qquad \text{(Transformação de Lorentz)} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}} \tag{4.67}$$

(4.68)

(4.69)

(4.70)

Podemos obter a relação inversa, manipulando as variáveis. Da primeira equação:

$$t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x \tag{4.71}$$

Inserindo na segunda

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{\gamma} + vt \\ &= \frac{x'}{\gamma} + v(\frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x) \end{aligned} \tag{4.72}$$

de forma que

$$\begin{aligned} x(1 - \frac{v^2}{c^2}) &= \frac{x'}{\gamma} + \frac{v}{\gamma}t' \\ \frac{x}{\gamma^2} &= \frac{x'}{\gamma} + \frac{v}{\gamma}t' \end{aligned} \tag{4.73}$$

ou seja,

$$x = \gamma(x' + vt') \tag{4.74}$$

Inserindo na equação para t, temos

$$\begin{aligned} t &= \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}x \\ &= \frac{t'}{\gamma} + \frac{v}{c^2}\gamma(x' + vt') \\ &= t'(\frac{1}{\gamma} + \frac{v^2}{c^2}\gamma) + \frac{v}{c^2}\gamma x' \\ &= t'\gamma(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}) + \frac{v}{c^2}\gamma x' \end{aligned} \tag{4.75}$$

Mas

$$(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}) = 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1 \tag{4.76}$$

Portanto

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \tag{4.77}$$

Assim, a transformação de Lorentz inversa fica

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \\ x &= \gamma(x' + vt') \qquad \text{(Transformação de Lorentz - Inversa)} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}} \tag{4.78}$$

(4.79)

(4.80)

(4.81)

Como requerido pelo princípio da relatividade entre sistemas de referência, a transformação inversa é idêntica à transformação direta, mudando $v \to -v$.

Como as transformações de Lorentz são *lineares*, podemos escrevê-las para dois eventos e subtrair as coordenadas, obtendo intervalos, e.g. $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. Temos então

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \tag{4.82}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \tag{4.83}$$

Assim, podemos revisitar os resultados para dilatação temporal e contração do espaço.

Dilatação do Tempo

Suponha que em S′ medimos 2 eventos *no mesmo ponto espacial*, i.e. $x'_1 = x'_2$. Portanto $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0$ e $\Delta t' = \Delta t_p$, o tempo próprio. Das Transformações de Lorentz inversas, temos

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x') \qquad \xrightarrow{\Delta x'=0} \qquad \boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \Delta t_p} \tag{4.84}$$

Contração do Espaço

Considere um objeto *em repouso* em S′. O comprimento próprio do objeto em S′ é dado por $L_0 = x'_2 - x'_1 = \Delta x'$. No sistema S, o objeto está se movendo. Portanto, para que seu comprimento seja medido como $L = x_2 - x_1 = \Delta x$, é preciso que essas duas medidas de posição ocorram no mesmo instante de tempo em S, i.e. $t_2 = t_1$, ou seja $\Delta t = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ L_0 &= \gamma(L - v\Delta t) \qquad \xrightarrow{\Delta t=0} \qquad \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}} \end{aligned} \tag{4.85}$$

4.5.4 Invariância do Elemento de Linha

Rotação em 3D

No espaço 3D, podemos definir um elemento de linha dado por

$$\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.86}$$

Basicamente, esse elemento indica a distância de um ponto (x, y, z) à origem do sistema de coordenadas S. Se tivermos uma barra linear com uma ponta na origem e uma ponta em (x, y, z), então o intervalo ℓ representa o comprimento dessa barra medido em S.

Podemos fazer uma rotação do sistema de coordenadas S em torno do eixo z, rotacionando de um ângulo θ relativamente ao eixo x. Obtemos, assim, um novo sistema de coordenadas S′, que terá novas coordenadas (x', y', z') para a ponta da barra, onde $z' = z$, já que a rotação foi feita no eixo z. As novas coordenadas serão dadas por

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \quad (4.87)$$
$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \quad (4.88)$$
$$z' = z \quad (4.89)$$

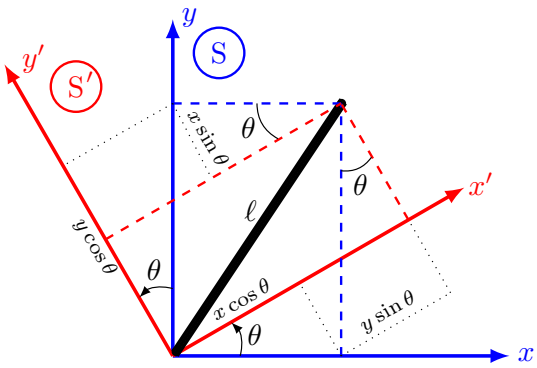


Figura 4.5: Rotação do sistema S ao redor do eixo z de um ângulo θ no plano xy, para se tornar o sistema S′.

Note que o elemento de linha calculado nesse novo sistema S′ é dado por

$$\begin{aligned}(\ell')^2 &= (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \\ &= (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 + (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 + z^2 \\ &= (x^2\cos^2\theta + y^2\sin^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta) + (x^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta) + z^2 \\ &= x^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + y^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \ell^2 \end{aligned} \quad (4.90)$$

ou seja, como esperado, medimos o mesmo comprimento $\ell' = \ell$ em ambos os sistemas de referência. A rotação muda as coordenadas x, y, z, mas não muda o elemento de comprimento, que permanece *invariante*.

Boost em 4D

Vamos agora definir o elemento de linha 4D no espaço-tempo, incorporando o tempo:

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.91)$$

De acordo com o postulado da relatividade, a velocidade da luz é sempre c, portanto um raio de luz partindo da origem percorre em um tempo t uma distância espacial ℓ, tal que $\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$, portanto $s^2 = 0$ para um raio de luz em um referencial inercial S.

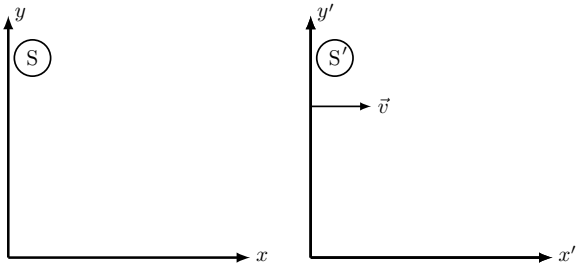


Figura 4.6: Sistema de referência S′ se movendo com velocidade $\vec{v}$ no eixo x relativa ao sistema S.

O referencial S′ se move com relação a S com velocidade v na direção x. Pelo postulado da constância da velocidade da luz, a velocidade da luz é a mesma em S e S′, portanto devemos ter $c = c'$, e igualmente $(s')^2 = 0$, ou seja:

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 = -c^2(t')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (s')^2 \tag{4.92}$$

Nós vimos que as rotações espaciais deixavam o elemento de linha 3D ℓ^2 invariante. Agora nós gostaríamos de saber quais transformações de coordenadas de S para S′ deixam o elemento de linha 4D s^2 invariante (e no caso da trajetória de um raio de luz, igual a zero).

Note que o postulado da velocidade da luz nos garante que $s^2 = (s')^2 = 0$ para um raio de luz em qualquer referencial. Portanto, se encontrarmos uma transformação de coordenadas que garanta que $s^2 = (s')^2$ mesmo nos casos em que s^2 não é necessariamente nulo, estaremos garantindo também o caso particular em que $s^2 = 0$. As transformações que garantem que $s^2 = (s')^2$ são exatamente as transformações de Lorentz.

É possível derivar as Transformações de Lorentz impondo esta condição (e.g. Moysés Vol. 4 § 6.4). Aqui, como já derivamos as transformações de Lorentz, vamos apenas confirmar que elas de fato preservam o elemento de linha em 4D para qualquer evento (mesmo quando $s^2 \neq 0$). Temos

$$\begin{aligned}
(s')^2 &= -c^2(t')^2 + (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \\
&= -c^2[\gamma(t - \frac{v}{c^2}x)]^2 + [\gamma(x - vt)]^2 + y^2 + z^2 \\
&= -c^2\gamma^2(t^2 - 2\frac{v}{c^2}xt + \frac{v^2}{c^4}x^2) + \gamma^2(x^2 - 2vtx + v^2t^2) + y^2 + z^2 \\
&= -c^2\gamma^2t^2 + 2\gamma^2vxt - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2x^2 + \gamma^2x^2 - 2\gamma^2vtx + v^2\gamma^2t^2 + y^2 + z^2 \\
&= -c^2\gamma^2t^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + \gamma^2x^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) + y^2 + z^2 \qquad \text{Use } \gamma^2 = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1} \\
&= -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
&= s^2
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Por fim, note que multiplicando a equação do tempo por c, podemos escrever as Transformações de Lorentz como

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x) \tag{4.94}$$

$$x' = \gamma(x - \frac{v}{c}ct) \tag{4.95}$$

ou em termos de $\beta = v/c$, temos

$$(ct') = \gamma(ct) - \beta\gamma x \tag{4.96}$$

$$x' = -\beta\gamma(ct) + \gamma x \tag{4.97}$$

Identificando

$$\gamma = \cosh(\phi) \tag{4.98}$$

$$\beta\gamma = \sinh(\phi) \tag{4.99}$$

Temos $\tanh(\phi) = \beta$ e note que $\cosh^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$. Temos então

$$(ct') = \cosh(\phi)(ct) - \sinh(\phi)x \tag{4.100}$$

$$x' = -\sinh(\phi)(ct) + \cosh(\phi)x \tag{4.101}$$

Usando as relações

$$\cosh(\phi) = \cos(i\phi) \quad (4.102)$$
$$\sinh(\phi) = -i\sin(i\phi) \quad (4.103)$$

temos

$$(ct') = \cos(i\phi)(ct) + i\sin(i\phi)x \quad (4.104)$$
$$x' = +i\sin(i\phi)(ct) + \cos(i\phi)x \quad (4.105)$$

Finalmente, multiplicando a primeira equação por $-i$:

$$(-ict') = \cos(i\phi)(-ict) + \sin(i\phi)x \quad (4.106)$$
$$x' = -\sin(i\phi)(-ict) + \cos(i\phi)x \quad (4.107)$$

Comparando com as equações para a rotação 3D no plano (x, y), vemos que a Transformação de Lorentz pode ser vista como uma rotação no plano $(-ict, x)$ com tempo imaginário, de um ângulo imaginário $i\phi$, relacionado ao fator de *boost* ou velocidade v via $\phi = \tanh^{-1}\beta$. Note que ao elevar $-ict$ ao quadrado, ganhamos um sinal negativo: $-c^2t^2$.

Entretanto, não há uma rotação de fato, apenas uma equivalência matemática formal, que dá uma intuição de porque o elemento de linha 4D se mantém invariante sob *boosts*, da mesma forma que o elemento de linha 3D se mantém invariante sob rotações. Em um caso, $\ell^2 = x^2 + y^2 + z^2$. No outro, $s^2 = (-ict)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$.

De fato, os eixos x e ct no referencial S são redefinidos no referencial S′ para x' e ct':

$$\text{Eixo } x' : \ ct' = 0 \quad \rightarrow \quad ct = \beta x \quad (4.108)$$
$$\text{Eixo } ct' : \ x' = 0 \quad \rightarrow \quad ct = \beta^{-1}x \quad (4.109)$$

Portanto, há uma "compressão"dos eixos em S de um ângulo θ tal que $\beta = \tan(\theta)$. O eixo x "sobe"de um ângulo θ, enquanto o eixo ct "desce"do mesmo ângulo. À medida que $\beta \rightarrow 1$, os eixos x' e ct' se aproximam da curva $ct = x$ vista no sistema S.

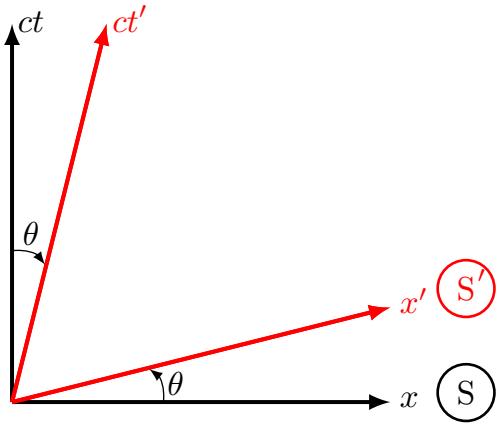


Figura 4.7: Eixos ct' e x' do sistema S′, vistos a partir das coordenadas do sistema S. Há uma compressão de um ângulo θ, tal que $\beta = \tan(\theta)$.

4.5.5 Invariância da Equação de Ondas

As transformações de Lorentz mantém as Eqs. de Maxwell invariantes, ou seja, as equações são válidas tanto em S como em S′. Ou seja, se por exemplo $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, então temos que também vale $\vec{\nabla}' \times \vec{E}' = -\partial\vec{B}'/\partial t'$. Mas para checar isso, precisaríamos saber como os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se transformam ao mudar de sistema de coordenadas, o que está além dos nossos objetivos aqui.

Mas vimos que as Eqs. de Maxwell no vácuo implicam a Equação de Ondas Eletromagnéticas:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (4.110)$$

que vale para $f = E$ ou $f = B$. Podemos mostrar que, independente de como E e B mudem, a equação de ondas permanece invariante sob transformações de Lorentz. De fato, as transformações de Lorentz são as únicas que implicam essa invariância, e isso pode ser usado para derivar as Transformações de Lorentz. Assumindo:

$$t' = At + Bx \tag{4.111}$$
$$x' = D(x - vt) \tag{4.112}$$
$$y' = y \tag{4.113}$$
$$z' = z \tag{4.114}$$

temos para as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = A\frac{\partial}{\partial t'} - Dv\frac{\partial}{\partial x'} \tag{4.115}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} = B\frac{\partial}{\partial t'} + D\frac{\partial}{\partial x'} \tag{4.116}$$

e para as derivadas segundas

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} = A^2\frac{\partial^2}{\partial (t')^2} - 2ADv\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + D^2v^2\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} \tag{4.117}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = B^2\frac{\partial^2}{\partial (t')^2} + 2BD\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + D^2\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} \tag{4.118}$$

Além disso

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \tag{4.119}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \tag{4.120}$$

A Eq. de onda em S implica

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0 \tag{4.121}$$

Substituindo os resultados anteriores na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} B^2\frac{\partial^2}{\partial (t')^2} + 2BD\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + D^2\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial (t')^2} + \frac{2ADv}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} - \frac{D^2v^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} &= 0 \\ (B^2 - \frac{A^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial (t')^2} + (2BD + \frac{2ADv}{c^2})\frac{\partial}{\partial x'\partial t'} + (D^2 - \frac{D^2v^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.122}$$

Para que a Eq. de Onda seja válida em S′, devemos ter que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} = 0 \tag{4.123}$$

Se a Eq. de Onda é válida em S′, os coeficientes das duas equações acima devem ser iguais. Portanto, temos que

$$B^2 - \frac{A^2}{c^2} = -\frac{1}{c^2} \tag{4.124}$$

$$2BD + \frac{2ADv}{c^2} = 0 \tag{4.125}$$

$$D^2 - \frac{D^2v^2}{c^2} = 1 \tag{4.126}$$

A última equação determina D

$$D^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \tag{4.127}$$

ou

$$D^2 = \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{4.128}$$

A segunda equação nos dá

$$B = -A\frac{v}{c^2} \tag{4.129}$$

E a primeira nos dá

$$\begin{aligned} A^2\frac{v^2}{c^4} - \frac{A^2}{c^2} &= -\frac{1}{c^2} \\ A^2\frac{v^2}{c^2} - A^2 &= -1 \\ A^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) &= 1 \end{aligned} \tag{4.130}$$

ou seja

$$A = D = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{4.131}$$

e

$$B = -A\frac{v}{c^2} = -\gamma\frac{v}{c^2} \tag{4.132}$$

Assim, re-obtemos as transformações de Lorentz como aquelas que mantém invariante a Eq. de ondas eletromagnéticas em qualquer sistema inercial:

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{4.133}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{4.134}$$

$$y' = y \tag{4.135}$$

$$z' = z \tag{4.136}$$

4.6 Transformação de Velocidades

Para intervalos infinitesimais, as transformações de espaço-tempo de S para S′ são

$$dt' = \gamma(dt - \frac{v}{c^2}dx) \tag{4.137}$$
$$dx' = \gamma(dx - vdt) \tag{4.138}$$
$$dy' = dy \tag{4.139}$$
$$dz' = dz \tag{4.140}$$

Suponha que em S mede-se a velocidade de algum objeto como sendo $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$, onde $V_x = dx/dt$, $V_y = dy/dt$ e $V_z = dz/dt$, enquanto em S′ as velocidades medidas são $\vec{V}' = (V'_x, V'_y, V'_z)$, onde $V'_x = dx'/dt'$, etc. Como

$$dt' = \gamma dt(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}) = \gamma dt(1 - \frac{vV_x}{c^2}), \tag{4.141}$$

dividindo os elementos espaciais pelo temporal acima, temos

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma dt(1 - \frac{vV_x}{c^2})} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}} \tag{4.142}$$
$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt(1 - \frac{vV_x}{c^2})} = \frac{dy/dt}{\gamma(1 - \frac{vV_x}{c^2})} \tag{4.143}$$
$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma dt(1 - \frac{vV_x}{c^2})} = \frac{dz/dt}{\gamma(1 - \frac{vV_x}{c^2})} \tag{4.144}$$

ou finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} V'_x &= \frac{V_x - v}{1 - \frac{vV_x}{c^2}} \qquad (4.145)\\ V'_y &= \frac{V_y}{\gamma(1 - \frac{vV_x}{c^2})} \qquad \text{(Transformação de Velocidades)} \qquad (4.146)\\ V'_z &= \frac{V_z}{\gamma(1 - \frac{vV_x}{c^2})} \qquad (4.147)\end{aligned}}$$

Podemos facilmente inverter essas equações para obter a relação inversa. Por exemplo, multiplicando a primeira equação acima por v/c^2, temos

$$\begin{aligned} \frac{vV'_x}{c^2} &= \frac{\frac{vV_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{vV_x}{c^2}} \\ \frac{vV'_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^4}V'_xV_x &= \frac{vV_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \\ \frac{vV'_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} &= \frac{v}{c^2}V_x(1 + \frac{vV'_x}{c^2}) \\ V'_x + v &= V_x(1 + \frac{vV'_x}{c^2}) \end{aligned} \tag{4.148}$$

Isolando V_x, temos

$$V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}} \tag{4.149}$$

Procedendo similarmente para as outras componentes, obtemos as transformações inversas

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= \frac{V'_x + v}{1 + \frac{vV'_x}{c^2}} && (4.150)\\ V_y &= \frac{V'_y}{\gamma(1 + \frac{vV'_x}{c^2})} \qquad \text{(Transformação de Velocidades - Inversa)} && (4.151)\\ V_z &= \frac{V'_z}{\gamma(1 + \frac{vV'_x}{c^2})} && (4.152) \end{aligned}}$$

Como esperado, essas relações podem ser obtidas simplesmente trocando $v \to -v$ na relação direta, bem como substituindo $V_x \leftrightarrow V'_x$, $V_y \leftrightarrow V'_y$ e $V_z \leftrightarrow V'_z$.

Note que se $v \ll c$, temos $\gamma \approx 1$ e obtemos as leis de transformação de velocidade de Galileu

$$\begin{aligned} V'_x &= V_x - v && (4.153)\\ V'_y &= V_y && (4.154)\\ V'_z &= V_z && (4.155) \end{aligned}$$

Por outro lado, se $V_x = c$, $V_y = V_z = 0$, temos

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c && (4.156)\\ V'_y &= \frac{0}{\gamma(1 - \frac{v}{c})} = 0 && (4.157)\\ V'_z &= \frac{0}{\gamma(1 - \frac{v}{c})} = 0 && (4.158) \end{aligned}$$

ou seja, um fóton se movendo com velocidade da luz no sistema S também o faz em S$'$. Caso $V_y = c$, $V_x = V_z = 0$, temos,

$$\begin{aligned} V'_x &= -v && (4.159)\\ V'_y &= \frac{c}{\gamma} && (4.160)\\ V'_z &= \frac{0}{\gamma} = 0 && (4.161) \end{aligned}$$

Desta forma

$$\begin{aligned} (V')^2 &= (V'_x)^2 + (V'_y)^2 + (V'_z)^2 \\ &= v^2 + c^2/\gamma^2 \\ &= v^2 + c^2(1 - v^2/c^2) \\ &= v^2 + c^2 - v^2 \\ &= c^2 && (4.162) \end{aligned}$$

ou seja, ainda assim, $|\vec{V}'| = c$.

Finalmente, suponha que $v \approx c$, temos então $1/\gamma \approx 0$ e $V'_x \approx (V_x - c)/(1 - V_x/c) \approx -c$, e ainda $V'_y \approx 0$ e $V'_z \approx 0$. Então se o sistema se move com uma velocidade que se aproxima de c, a velocidade medida em S$'$ também será próxima de c.

4.7 Efeito Doppler da Radiação

Considerando a luz como uma onda eletromagnética, e levando em conta as transformações de Lorentz do espaço-tempo, podemos calcular o tempo entre dois picos de onda consecutivos do ponto de vista de um detector fixo no sistema S e um detector fixo no sistema S′.

Vamos supor que a fonte de luz é fixa na origem do sistema S, enquanto o sistema S′ se move se afastando do sistema S, e portanto da fonte. Cada sistema tem um detector distinto. Em S, o detector está fixo em $x = x_{\rm dec}$, enquanto em S′, o detector está fixo em $x' = x'_{\rm dec}$. Suponha que a fonte emite dois picos de onda separados por 1 comprimento de onda. Esses dois pulsos são vistos pelos diferentes detectores em S e em S′. Devemos portanto monitorar os seguintes eventos:

- Evento 1: Emissão do 1^o pulso de luz (vermelho) da fonte.
- Evento 2: Emissão do 2^o pulso de luz (azul) da fonte.
- Evento 3: Detecção do 1^o pulso de luz (vermelho) no detector.
- Evento 4: Detecção do 2^o pulso de luz (azul) no detector.

Do ponto de vista de S (veja Fig. 4.8), os eventos 1 e 2 acontecem na origem $x_1 = x_2 = 0$ e em tempos t_1 and t_2. Claramente $\Delta t = t_2 - t_1$ é o período da onda e $\lambda = c\Delta t$ é seu comprimento de onda, como medidos em S.

Um detector em S fixo em $x_{\rm det}$ vai detectar o pico emitido no evento 1 (evento 3) no tempo t_3:

$$t_3 = t_1 + (x_{\rm det} - x_1)/c \tag{4.163}$$

Esse mesmo detector vai similarmente detectar o pico emitido no evento 2 (evento 4) no tempo t_4:

$$t_4 = t_2 + (x_{\rm det} - x_2)/c \tag{4.164}$$

Como a fonte está em repouso em S ($x_1 = x_2 = x_{\rm fon} = 0$), o detector vai deduzir um período de $T = t_4 - t_3 = t_2 - t_1 = \Delta t$ para as ondas e um comprimento de onda $\lambda = c\Delta t$.

Do ponto de vista de S′ (veja Fig. 4.11), o evento 1 de emissão acontece em (t'_1, x'_1) e o evento 2 acontece em (t'_2, x'_2). Pelas transformações de Lorentz, temos:

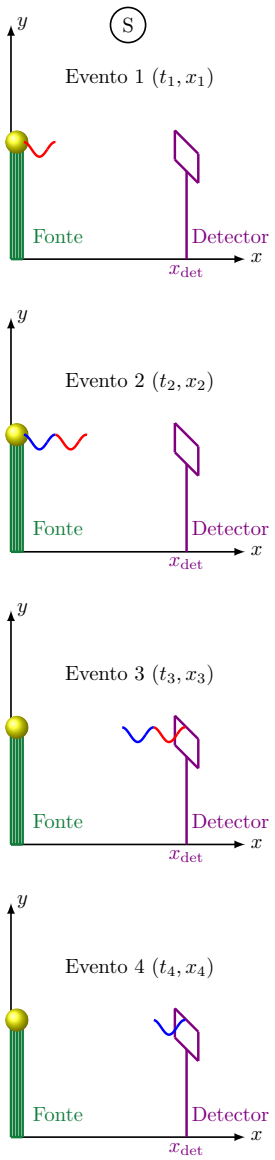


Figura 4.8: Emissão (eventos 1 e 2) e detecção (eventos 3 e 4) de dois pulsos de luz consecutivos (picos de onda) como vistos no sistema S. Fonte parada em relação ao detector. O período da onda é medido como $T = t_4 - t_3$.

$$ct'_1 = \gamma(ct_1 - \beta x_1) = \gamma ct_1 \quad (4.165)$$
$$x'_1 = \gamma(x_1 - \beta ct_1) = -\gamma\beta ct_1 \quad (4.166)$$
$$ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta x_2) = \gamma ct_2 \quad (4.167)$$
$$x'_2 = \gamma(x_2 - \beta ct_2) = -\gamma\beta ct_2 \quad (4.168)$$

Um detector fixo na origem de S′ detectará o primeiro pulso de luz (evento 3) em t'_3 dado por

$$t'_3 = t'_1 + (x'_{\rm det} - x'_1)/c \quad (4.169)$$
$$= \gamma t_1 + [x'_{\rm det} - (-\gamma\beta ct_1)]/c \quad (4.170)$$
$$= \gamma t_1 + x'_{\rm det}/c + \gamma\beta t_1 \quad (4.171)$$
$$= \gamma(1+\beta)t_1 + x'_{\rm det}/c \quad (4.172)$$

Este mesmo detector vai também detectar o segundo pulso de luz (evento 4) em t'_4 dado por

$$t'_4 = t'_2 + (x'_{\rm det} - x'_2)/c \quad (4.173)$$
$$= \gamma t_2 + [x'_{\rm det} - (-\gamma\beta ct_2)]/c \quad (4.174)$$
$$= \gamma t_2 + x'_{\rm det}/c + \gamma\beta t_2 \quad (4.175)$$
$$= \gamma(1+\beta)t_2 + x'_{\rm det}/c \quad (4.176)$$

Portanto, em S′, o período da onda será medido como

$$T' = t'_4 - t'_3 = \gamma(1+\beta)(t_2 - t_1) \quad (4.177)$$
$$= \gamma(1+\beta)T \quad (4.178)$$

ou

$$T' = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\,T = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,T \quad (4.179)$$

Como $\lambda = cT$, encontramos para o comprimento de onda λ':

$$\boxed{\lambda' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda} \quad \text{(Efeito Doppler)} \quad (4.180)$$

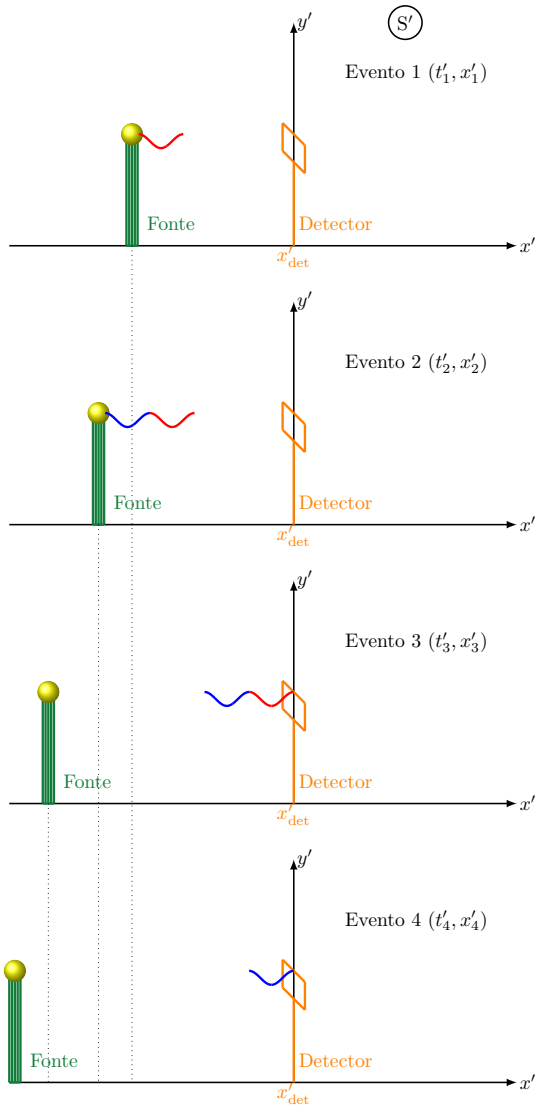


Figura 4.9: Emissão (eventos 1 e 2) e detecção (eventos 3 e 4) de dois pulsos de luz consecutivos (picos de onda) como observados no referencial S′. Detector e fonte se afastam. O período da onda é medido como $T' = t'_4 - t'_3$, e é maior que o período T medido em S.

Como $c = \lambda\nu$, para a frequência $\nu = 1/T = c/\lambda$, temos

$$\boxed{\nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu} \quad \text{(Efeito Doppler)} \tag{4.181}$$

No referencial onde o detector vê a fonte se afastar (S′), o comprimento de onda é maior (e a frequência é menor) do que no referencial onde o detector vê a fonte parada (S): o movimento relativo de *afastamento* faz o comprimento da onda (e a frequência) sofrer um deslocamento para o vermelho ou *redshift*.

Caso a fonte e o detector estivessem se aproximando, trocaríamos $\beta \to -\beta$ nas equações acima, e o comprimento de onda em S′ seria menor (frequência maior) do que em S: o movimento de *aproximação* faria o comprimento de onda sofrer um deslocamento para o azul ou *blueshift*.

Também pode-se derivar o efeito Doppler impondo que a fase da onda eletromagnética $\phi = (\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$ deve permanecer *invariante* quando se vai do referencial S para o S′. Ambos os sistemas detectam o mesmo número de cristas de onda, ou seja $\phi = \phi'$ (veja Apêndice E).

4.8 Momento Relativístico

Na dinâmica newtoniana, o momento linear, definido como

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4.182}$$

é conservado em sistemas fechados para todos os referenciais inerciais relacionados pela transformação de Galileu.

Já no caso relativístico, as transformações de Lorentz para as velocidades são mais complicadas. Mesmo que o momento usual seja conservado em um sistema S, não há garantia de que ele será conservado em S′.

Para garantir que o momento linear continue sendo conservado em todos os referencias inerciais no caso relativístico, precisamos generalizar a sua definição. Entretanto, para baixas velocidades, o momento relativístico deve se reduzir ao momento newtoniano. Vamos então admitir que a massa inercial possa depender do módulo da velocidade da partícula:

$$m = m(v) \tag{4.183}$$

e assim, o momento relativístico fica

$$\vec{p} = m(v)\vec{v} \tag{4.184}$$

Para determinar $m(v)$, vamos impor que esse momento seja conservado em uma colisão elástica vista tanto no sistema S quanto em S′.

Considere duas partículas idênticas a e b que se aproximam em um referencial S′, tomado como o referencial do centro de massa, onde o momento total é nulo. Temos $\vec{V}'_a = -\vec{V}'_b$ e

$$V'_a = V'_b = V' = \sqrt{V'^2_x + V'^2_y} \tag{4.185}$$

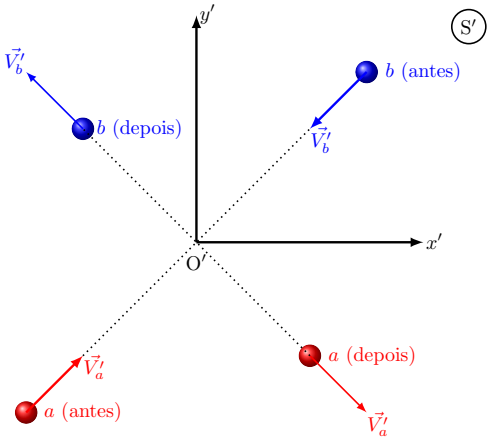


Figura 4.10: Colisão elástica de duas partículas a e b, como vista no sistema S′ do centro de massa, onde o momento total é nulo ($V'_a = V'_b$) antes e após a colisão.

tanto antes quanto após a colisão. Portanto, qualquer que seja $m(v)$, o momento é conservado (e nulo) em S′. As componentes das velocidades de a e b antes e depois da colisão estão mostradas na Tabela 4.1.

	Componentes de $\vec{V}_a$ e $\vec{V}_b$ em S′			
	x'	y'	x'	y'
Antes	V'_x	V'_y	$-V'_x$	$-V'_y$
Depois	V'_x	$-V'_y$	$-V'_x$	V'_y
	Partícula a		Partícula b	

Tabela 4.1:

Já o sistema S vê S′ se afastar com velociade v na direção x. As componentes das velocidades de a e b são dadas na Tabela 4.2, de acordo com as Transformações de Lorentz.

	Componentes de $\vec{V}_a$ e $\vec{V}_b$ em S			
	x	y	x	y
Antes	$\frac{V'_x+v}{[1+V'_x v/c^2]}$	$\frac{V'_y}{\gamma[1+V'_x v/c^2]}$	$\frac{-V'_x+v}{[1-V'_x v/c^2]}$	$\frac{-V'_y}{\gamma[1-V'_x v/c^2]}$
Depois	$\frac{V'_x+v}{[1+V'_x v/c^2]}$	$\frac{-V'_y}{\gamma[1+V'_x v/c^2]}$	$\frac{-V'_x+v}{[1-V'_x v/c^2]}$	$\frac{V'_y}{\gamma[1-V'_x v/c^2]}$
	Partícula a		Partícula b	

Tabela 4.2:

Note que, no sistema S, temos $(V_a)_{\text{antes}} = (V_a)_{\text{depois}} = V_a$ e também $(V_b)_{\text{antes}} = (V_b)_{\text{depois}} = V_b$. Porém $V_a \neq V_b$.

A conservação do momento no eixo x é automaticamente satisfeita, qualquer que seja a forma

de $m(v)$. Já no eixo y, a conservação impõe que

$$[m(V_a)V_{a,y} + m(V_b)V_{b,y}]_{\text{antes}} = [m(V_a)V_{a,y} + m(V_b)V_{b,y}]_{\text{depois}} \tag{4.186}$$

Substituindo as componentes da tabela, temos

$$m(V_a)\frac{V'_y}{\gamma[1+V'_x v/c^2]} + m(V_b)\frac{-V'_y}{\gamma[1-V'_x v/c^2]} = m(V_a)\frac{-V'_y}{\gamma[1+V'_x v/c^2]} + m(V_b)\frac{V'_y}{\gamma[1-V'_x v/c^2]} \tag{4.187}$$

Note que o lado direito é o lado esquerdo multiplicado por -1. Passando o lado direito para o lado esquerdo, teremos 2 vezes o lado esquerdo sendo zero. Ou seja, o lado esquerdo deve ser zero:

$$m(V_a)\frac{V'_y}{\gamma[1+V'_x v/c^2]} + m(V_b)\frac{-V'_y}{\gamma[1-V'_x v/c^2]} = 0 \tag{4.188}$$

o que implica

$$\frac{m(V_a)}{m(V_b)} = \frac{[1+V'_x v/c^2]}{[1-V'_x v/c^2]} \tag{4.189}$$

Agora, temos a seguinte relação que pode ser mostrada a partir das Transformações de velocidade (veja Apêndice F)

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{(V')^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{V'_x v}{c^2}\right)^2} \tag{4.190}$$

Para as partículas a e b, essas relações ficam

$$1 - \frac{V_a^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{(V'_a)^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{V'_x v}{c^2}\right)^2} \tag{4.191}$$

$$1 - \frac{V_b^2}{c^2} = \frac{\left(1-\frac{(V'_b)^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{V'_x v}{c^2}\right)^2} \tag{4.192}$$

Mas como $V'_a = V'_b = V'$, dividindo uma equação pela outra e tirando a raiz, temos

$$\frac{\sqrt{1-\frac{V_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{V_a^2}{c^2}}} = \frac{\left(1+\frac{V'_x v}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{V'_x v}{c^2}\right)} \tag{4.193}$$

Desta forma, a razão de massas fica

$$\frac{m(V_a)}{m(V_b)} = \frac{\sqrt{1-\frac{V_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{V_a^2}{c^2}}} \tag{4.194}$$

ou finalmente

$$m(V_a)\sqrt{1-\frac{V_a^2}{c^2}} = m(V_b)\sqrt{1-\frac{V_b^2}{c^2}} \tag{4.195}$$

e sabemos que $V_a \neq V_b$. Portanto, para que o momento se conserve em S, a grandeza

$$m(v)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m(v)}{\gamma} \tag{4.196}$$

deve ser independente da velocidade, ou seja é um invariante. Podemos avaliar essa quantidade em $v = 0$ e chamá-la de $m_0 = m(v = 0)$. Portanto encontramos

$$m(v)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = m(v=0)\sqrt{1-0} = m_0 \tag{4.197}$$

ou

$$\boxed{m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0} \qquad \text{(Massa Relativística)} \tag{4.198}$$

Dizemos que m_0 é a massa de repouso da partícula. O momento relativístico fica então

$$\boxed{\vec{p} = m(v)\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad \text{(Momento Relativístico)} \tag{4.199}$$

Note que no limite de baixas velocidades, $v \ll c$, ou seja, $\gamma \approx 1$, e reobtemos o momento newtoniano $\vec{p} \approx m_0\vec{v}$.

4.8.1 Exemplo: Força Relativística

Definimos a força ainda como a derivada temporal do momento, mas agora o momento relativístico:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m_0\gamma\vec{v})}{dt} = m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = m_0\left[\frac{d\vec{v}/dt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{\vec{v}/c^2(\vec{v}\cdot d\vec{v}/dt)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right] \tag{4.200}$$

Se $\vec{v} \perp d\vec{v}/dt$, último termo entre colchetes é nulo, e

$$\vec{F} = m_0\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = \gamma m_0\vec{a} \tag{4.201}$$

Se $\vec{v} \parallel d\vec{v}/dt \parallel \hat{n}$, temos

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= m_0\left[\frac{(dv/dt)\hat{n}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{(v/c^2)\hat{n}(vdv/dt)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right] \\
&= m_0\frac{dv}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right]\hat{n} \\
&= m_0\frac{dv}{dt}\left[\frac{1-v^2/c^2+v^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\right]\hat{n} \\
&= m_0\gamma^3\frac{dv}{dt}\hat{n} \\
&= \gamma^3 m_0\vec{a}
\end{aligned} \tag{4.202}$$

Por exemplo, suponha um eletron de carga q, massa m_0 em um campo elétrico constante $\vec{E}$. Temos

$$F = qE = \gamma^3 m_0 a \quad \rightarrow \quad a = \frac{qE}{m_0\gamma^3} \tag{4.203}$$

ou

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m_0}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2} \tag{4.204}$$

Note que quando $v \to c$, temos $a \to 0$, ou seja, a partícula para de acelerar. Podemos escrever

$$\frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{qE}{m_0}dt \tag{4.205}$$

Integrando e impondo $v(t = 0) = 0$. temos

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{qE}{m_0}t \tag{4.206}$$

Dividindo por c, elevando ao quadrado dos dois lados e isolando v/c, temos

$$\frac{v(t)}{c} = \frac{(qE/m_0c)t}{\sqrt{1 + (q^2E^2/m_0^2c^2)t^2}} \tag{4.207}$$

Quando $t \to \infty$, temos $v(t) \to c$, e $a \to 0$. Integrando mais uma vez, temos

$$\frac{x(t)}{c} = \int \frac{v(t)}{c}dt \quad = \quad \frac{m_0c}{qE}\sqrt{1 + \frac{q^2E^2}{m_0^2c^2}t^2} \tag{4.208}$$

Quando $t \to \infty$, temos $x(t) \to ct$.

4.9 Energia Relativística

Lembre-se que na mecânica clássica, o trabalho W feito por uma força era igual à variação de sua energia cinética ΔK. Vamos supor que uma partícula é acelerada por uma força $\vec{F}$ na direção x a partir do repouso na origem ($x_0 = 0$ e $v_0 = 0$). Assim, $K_0 = 0$ e temos

$$W = \Delta K = K - \underbrace{K_0}_{=0} = K = \int_0^x F dx \tag{4.209}$$

Usando $dx = vdt$, temos

$$K = \int_0^x F\ vdt \tag{4.210}$$

A força é a derivada temporal do momento relativístico $p = \gamma m_0 v$, ou seja

$$\begin{aligned} F &= \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{m_0 dv/dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 v(-2v/c^2)dv/dt}{2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \\ &= \frac{m_0 dv/dt(1 - v^2/c^2) + m_0 v^2/c^2 dv/dt}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \frac{m_0 dv/dt}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \end{aligned} \tag{4.211}$$

Portanto

$$K = \int_0^x F\ vdt = \int_0^x \frac{m_0 dv/dt}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\ vdt = m_0 \int_0^v \frac{vdv}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} \tag{4.212}$$

A integral pode ser feita por substituição $u = 1 - v^2/c^2$, $du = -2v/c^2 dv$:

$$\begin{aligned} K &= m_0 \int_1^u \frac{-c^2 du}{2(u)^{3/2}} = \frac{m_0 c^2}{u^{1/2}}|_1^u = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}|_0^v \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 \end{aligned} \tag{4.213}$$

ou

$$\boxed{K = (\gamma - 1) m_0 c^2} \qquad \text{(Energia Cinética)} \tag{4.214}$$

Essa expressão para a energia cinética parece complicada, mas de fato ela se reduz à expressão usual para baixas velocidades $v \ll c$. De fato, podemos usar a expansão de Taylor para

$$(1-x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} + ... \tag{4.215}$$

com $x = v^2/c^2$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \tag{4.216}$$

Assim

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \approx m_0 c^2 (1 + \frac{v^2}{2c^2}) - m_0 c^2 = \frac{m_0 v^2}{2} \quad \text{(Caso Newtoniano)} \tag{4.217}$$

Note que obtemos a energia cinética K subtraindo uma constante $m_0 c^2$ da quantidade $\gamma m_0 c^2$. A quantidade $m_0 c^2$ é a chamada energia de repouso:

$$\boxed{E_R = m_0 c^2} \qquad \text{(Energia de Repouso)} \tag{4.218}$$

Portanto $\gamma m_0 c^2 = K + E_R$, pode ser interpretado como a energia total E, soma de energia cinética mais energia de repouso:

$$\begin{aligned} \text{Energia total} &= \text{Energia cinética} + \text{Energia de Repouso} \\ E &= K + E_R \end{aligned} \tag{4.219}$$

ou

$$\boxed{E = \gamma m_0 c^2} \qquad \text{(Energia Total)} \tag{4.220}$$

Como $p = \gamma m_0 v$, temos

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 - (\gamma^2 m_0^2 v^2) c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \underbrace{(1 - \frac{v^2}{c^2})}_{\gamma^{-2}} = m_0^2 c^4 \tag{4.221}$$

ou seja

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4} \qquad \text{(Energia e Momento)} \tag{4.222}$$

Note que, quando a partícula está em repouso, $v = 0$ e $p = 0$, portanto sua energia total é apenas a energia de repouso

$$\boxed{E = m_0c^2} \qquad \text{(Partícula em repouso)} \tag{4.223}$$

Por outro lado, para uma partícula sem massa, $m_0 = 0$, e sua energia é dada por

$$\boxed{E = pc} \qquad \text{(Partícula sem massa)} \tag{4.224}$$

Esse de fato é o caso do fóton, a partícula de luz. Embora estejamos vendo que a luz é uma uma onda, quando estudarmos a Física Quântica, veremos que a luz também pode ser vista como partículas, chamadas fótons, com massa nula ($m_0 = 0$). Portanto para a luz, vale que $E = pc$.

De fato, no estudo eletromagnético, pode-se mostrar que o vetor de Poynting S está relacionado ao momento transportado pela radiação, e também à energia transportada por ela. Tínhamos que

$$S = uc \tag{4.225}$$

onde u é a densidade de energia da radiação

$$u = \frac{dE}{dV} \tag{4.226}$$

Definindo $\vec{g}$ a densidade de momento da radiação

$$\vec{g} = \frac{d\vec{p}}{dV} \tag{4.227}$$

temos que $E = pc$ implica $u = gc$, e portanto

$$g = \frac{u}{c} = \frac{S}{c^2} \tag{4.228}$$

De fato, isso vale vetorialmente

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}} \qquad \text{(Densidade de Momento da Radiação)} \tag{4.229}$$

4.9.1 Pressão de Radiação

Finalmente, podemos calcular a pressão exercida pela radiação. Suponha que a radiação eletromagnética seja absorvida por uma superfície de área A, e que esta absorção ocorra em um tempo Δt, no qual a onda percorre uma distância $c\Delta t$ e transfere seu momento linear à superfície, exercendo sobre esta uma força e, portanto, um pressão. O momento transferido da onda para a superfície neste tempo é dado por:

$$\Delta p = \langle g \rangle \Delta V = \frac{\langle S \rangle}{c^2} Ac\Delta t = \frac{I}{c}\, A\Delta t \tag{4.230}$$

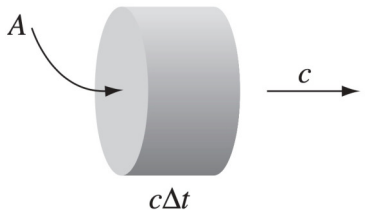


Figura 4.11: Durante um intervalo de tempo Δt, onda percorre uma distância $c\Delta t$, ocupando um volume $\Delta V = Ac\Delta t$. (Griffiths)

onde $I = \langle S \rangle$ é a intensidade da radiação. Portanto a força exercida pela radiação é dada por

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{I}{c}\, A \tag{4.231}$$

e a pressão $P = F/A$ fica

$$\boxed{P = \frac{I}{c} = \langle u \rangle} \qquad \text{(Pressão de Radiação - Absorção)} \tag{4.232}$$

Quando a onda é *refletida* pela superfície, a variação de momento da onda é 2 vezes o momento inicial $\Delta p = 2\langle g \rangle \Delta V$, e portanto

$$\boxed{P = \frac{2I}{c} = 2\langle u \rangle} \qquad \text{(Pressão de Radiação - Reflexão)} \tag{4.233}$$