

EXERCÍCIO VI

VI. 1/3

De acordo com o enunciado, A e B são duas matrizes quadradas de ordem n que comutam. Ou seja,

$$AB = BA \iff AB - BA = 0 \quad (1)$$

————— //

$$(A) \quad (A-B)^2 = (A-B)(A-B)$$

$$= A \cdot A + A(-B) + (-B) \cdot A + (-B)(-B)^2$$

$$= A^2 - AB - BA + B^2$$

Por (1), segue que

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

————— //

$$(B) \quad (A-B)(A+B) = A \cdot A + A \cdot B + (-B)A + (-B)B$$

$$= A^2 + AB - BA - B^2$$

NOVAMENTE, POR ① ESSA IGUALDADE TORNA-SE

$$(A-B)(A+B) = A^2 + 0 - B^2 = A^2 - B^2$$

____ // _____

$$(c) (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$= A(A^2) + A(AB) + A(B^2) + (-B)A^2 + (-B)(AB) + (-B)B^2$$

$$= A^3 + (A^2B - BA^2) + (AB^2 - BAB) - B^3 \quad (2)$$

Como

$$BA^2 = (BA)A \quad \text{e} \quad A^2B = A(AB)$$

A IGUALDADE ① PERMITE NOTAR QUE

$$BA^2 = ABA \quad \text{e} \quad A^2B = ABA ;$$

LOGO

$$A^2B - BA^2 = 0$$

③

DE MODO ANÁLOGO, TAMBÉM SEVE, POR ①, QUE VI. 3/B

$$BAB = (BA)B = (AB)B = A(B \cdot B) = AB^2$$

$$\therefore AB^2 - BAB = 0 \quad \text{④}$$

DESSA MANEIRA, SUBSTITUINDO ③ E ④ EM ②, TEMOS QUE

$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3 + 0 + 0 - B^3 = A^3 - B^3$$

————— //

EXERCÍCIO VII

(VII. 1/5)

SEJAM A E B DUAS MATRIZES COM MESMA ORDEM n , CUYOS ELEMENTOS SÃO DADOS RESPECTIVAMENTE POR a_{jk} E b_{jk} , ONDE $1 \leq j, k \leq n$.

VAMOS SUPOR QUE ESSAS DUAS MATRIZES SÃO ANTSSIMÉTRICAS; OU SEJA,

$$a_{jk} = -a_{kj} \quad (1), \text{ e } b_{jk} = -b_{kj} \quad (2)$$

————— // —————

LEMBREMOS QUE, COM O AUXÍLIO DESSAS DUAS MATRIZES, UMA TERCEIRA PODE SER DEFINIDA ATRAVÉS DE

$$C = AB,$$

COM OS SEUS ELEMENTOS DADOS, POR DEFINIÇÃO DO PRODUTO ENTRE DUAS MATRIZES, COMO

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} \quad (3)$$

VII. 2/5

INSERINDO (1) E (2) NESSE ~~DE~~ SOMATÓRIO, OBSERVAMOS QUE

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n (-a_{lj})(-b_{kl}) = \sum_{l=1}^n a_{lj} b_{kl} \quad (4)$$

"AJUSTANDO" ESSE RESULTADO (4), PARA DEIXÁ-LO COM O MESMO ASPECTO DE (3), VEMOS QUE

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^n b_{kl} a_{lj} \quad (5),$$

DE ONDE TORNA-SE CLARA A OCORRÊNCIA DE UMA CERTA "INVERSÃO DE PAPEIS", SE ASSIM PODEMOS DIZER, POR UMA SIMPLES CONSEQUÊNCIA DA ANTISSIMETRICIDADE DE A E B. ESSA "INVERSÃO DE PAPEIS" FICA NÍTIDA QUANDO OBSERVAMOS O SEGUINTE FATO: ASSIM COMO DEFINIMOS

A MATRIZ C ACIMA MENCIONADA, PODERÍAMOS MUITO BEM TER DEFINIDO UMA OUTRA D , DADA POR

$$D = BA;$$

NESSE CASO, TAMBÉM POR DEFINIÇÃO DO QUE CONHECEMOS POR PRODUTO ENTRE DUAS MATRIZES, OS ELEMENTOS DE D SÃO EXPRESSOS POR

$$d_{jk} = \sum_j b_{je} a_{ek} \quad (6).$$

ASSIM, COMPARANDO (5) E (6), VEMOS QUE

$$c_{jk} = a_{kj}. \quad (7)$$

(OBSERVE QUE HOUVE UMA MUDA DE POSICIONAMENTO ENTRE j E k EM (7)).

NO ENTANTO A PERGUNTA FEITA NA ENUNCIADA REFERE-SE À POSSIBILIDADE DO PRODUTO ENTRE A E B REMONTAR A

UMA MATRIZ TAMBÉM ANTISSIMÉTRICA: OU SEJA, SE (POR EXEMPLO)

$$C_{jk} = -C_{kj} \quad (8)$$

É VERDADE OU NÃO,

PARA RESPONDER A ISSO, DEVEMOS OBSERVAR QUE, POR (3), FAZ-SE NECESSÁRIO QUE

$$C_{jk} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{lk} = - \sum_{l=1}^n a_{kl} b_{lj} \quad (9),$$

DE ONDE TAMBÉM TORNA-SE CLARO, ANALOGAMENTE AO QUE JÁ FOI EXPOSTO ACIMA, QUE C_{jk} TAMBÉM PODE SER INTERPRETADO COMO O FRUTO DO PRODUTO

$$-AB \quad (10)$$

DESSE MODO, COMPARANDO (9) COM (6-A), VEMOS QUE A ÚNICA MANEIRA DO PRODUTO ENTRE A E B REMONTAR A UMA

UMA MATRIZ ANTISSIMÉTRICA É SE

$$BA = -AB \Leftrightarrow AB + BA = 0;$$

OU SEJA, SE A E B ANTICOMUTAREM.

//

EXERCÍCIO IX

IX.1/3

SEJA A MATRIZ A DADA POR

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

PARA DETERMINAR A MATRIZ QUADRADA

$$B = \begin{pmatrix} b & c & d \\ e & f & g \\ h & i & j \end{pmatrix},$$

(com $b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$) QUE COMUTA COM A,

DEVEMOS DETERMINAR TODAS AS CONSTANTES NEZA PRESENTES,
DE MODO QUE VALHA

$$AB = BA$$

(1)

————— " —————

EFETUANDO O PRODUTO AB EXPLICITAMENTE, SEGUE QUE

Ex. 2/3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & b & c & d \\ 0 & a & 1 & e & f & g \\ 0 & 0 & a & h & i & j \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ab+e & ac+f & ad+g \\ ae+h & af+i & ag+j \\ ah & ai & aj \end{pmatrix}$$

(2)

Já do produto BA vemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} b & c & d & a & 1 & 0 \\ e & f & g & 0 & a & 1 \\ h & i & j & 0 & 0 & a \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ab & b+ac & c+ad \\ ae & e+af & f+ag \\ ah & h+ai & i+aj \end{pmatrix}$$

(3)

Como, por (1), ESSES DOIS RESULTADOS DEVEM SER IGUAIS,
DO CONFRONTO ENTRE (2) E (3) TEMOS QUE:

$$ab + e = ab \Rightarrow e = 0$$

$$ac + f = b + ac \Rightarrow f = b \quad (4)$$

$$ad + g = c + ad \Rightarrow g = c$$

$$ae + h = ae \Rightarrow h = 0$$

$$af + i = e + af \Rightarrow i = f \stackrel{(4)}{=} b \quad (5)$$

$$ag + j = f + ag \Rightarrow j = f \stackrel{(4)}{=} b$$

$$ah = ah \quad (\text{ok!})$$

$$ai = h + ai \Rightarrow h = 0$$

$$aj = i + aj \Rightarrow i = 0 \therefore \text{Por (5), } b = 0$$

Logo,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIO XII

XII, 1/3

DADA A MATRIZ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

É FÁCIL VER QUE

$$A^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}A = AA^{-1} = \underline{11}$$

DESSE MODO, TEMOS QUE

$$A + A^{-1} = A + A = 2A$$

$$\Rightarrow (A + A^{-1})^1 = 2^1 A$$

$$\Rightarrow (A + A^{-1})^{2 \cdot 0 + 1} = 2^{2 \cdot 0 + 1} A$$

E ISSO MOSTRA A VALIDADE DA RELAÇÃO

$$(A + A^{-1})^{2n+1} = 2^{2n+1} A$$

①

PARA $n=0$.

XII.2/3

SUPONDO QUE ① É VÁLIDO PARA $n=k$:

$$(A+A^{-1})^{2k+1} = Z^{2k+1} A, \quad \textcircled{2}$$

AO MULTIPLICARMOS ② POR $(A+A^{-1})^2$ DE AMBOS OS LADOS, TEREMOS

$$(A+A^{-1})^{2k+1} \cdot (A+A^{-1})^2 = Z^{2k+1} A (A+A^{-1})^2$$

$$(A+A^{-1})^{2k+1+2} = Z^{2k+1} A (A+A^{-1})^2$$

$$(A+A^{-1})^{2(k+1)+1} = Z^{2k+1} A (A+A^{-1})^2 \quad \textcircled{3}$$

LEMBRANDO QUE

$$A+A^{-1} = ZA \Rightarrow (A+A^{-1})(A+A^{-1}) = ZA(A+A^{-1})$$

$$\Rightarrow (A+A^{-1})^2 = (ZA)(ZA) = Z^2 A^2 = Z^2 A \cdot A =$$

$$= Z^2 A \cdot A^{-1} = Z^2 \underline{1}$$

A SUA SUBSTITUIÇÃO EM ③ MOSTRA QUE

$$\begin{aligned}(A + A^{-1})^{Z(k+1)+1} &= Z^{Zk+1} A \cdot Z^Z \underline{11} \\ &= Z^{Zk+1+Z} (A \cdot \underline{11}) \\ &= Z^{Z(k+1)+1} A\end{aligned}$$

E ISSO REVELA (POR INDUÇÃO FINITA) A VALIDADE DE
① PARA TODO $n \in \mathbb{N}$.

PS: AQUI $\underline{11}$ É A MATRIZ IDENTIDADE,

————— " —————

EXERCÍCIO X

X.1/2

A CONDIÇÃO PARA QUE UMA MATRIZ QUALQUER SEJA INVERTÍVEL É QUE ~~QUE~~ O SEU DETERMINANTE NÃO SEJA NULO.

NO CASO DA MATRIZ REAL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

É FÁCIL VER QUE TRATA-SE DE UMA INVERTÍVEL, BASTA VISTA QUE $\det A = 1$, QUALQUER SEJAM OS VALORES ASSUMIDOS POR a, b E c .

——— //

PARA MOSTRAR QUE

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

É, DE FATO, A INVERSA DE A BASTA MULTIPLICAR (À ES-

X.212

QUEREA E À DIREITA) A^{-1} POR A , OBTENDO A MATRIZ
IDENTIDADE.

————— //

EXERCÍCIO XI

XI. 1/3

$$(A) \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

PARA RESOLVER ESSE SISTEMA, DEVEMOS NOTAR QUE ELE PODE SER REEXPRESSO, SOB UM FORMATO DE EQUAÇÃO MATRICIAL, COMO:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

HAJA VISTA QUE O DESENVOLVIMENTO DESSA EQUAÇÃO LEVA A

$$\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

COMO $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, A EQUAÇÃO MA-

XI. 2/3

TRICIAZ ① É PERFEITAMENTE RESOLVÍVEL; OU SEJA,
O SISTEMA ORIGINAL É COMPATÍVEL E DETERMINADO.

UMA VEZ QUE A INVERSA DE

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{é } \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2},$$

AO MULTIPLICARMOS ① À ESQUERDA PELO MATRIZ ②,

TEREMOS:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Logo a solução do sistema original é

XI. 3/3

$$S = \{(2, -2)\}$$

____ // _____

Os sistemas (B) e (C) devem ser analisados
segundo esse mesmo raciocínio.

____ // _____