

1ª Lista de Exercícios – Eletromagnetismo 1 – Noturno
Entrega: 17 de agosto

1.1 Prove os seguintes resultados de cálculo vetorial:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{G} - (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \cdot \vec{F} \\ \vec{\nabla} \times (f \vec{F}) &= (\vec{\nabla} f) \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}\end{aligned}$$

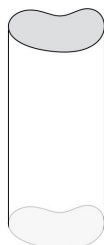
1.2 Prove as seguintes relações para o vetor posição $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{R} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{R} &= 3 \\ \vec{\nabla} \left(\frac{1}{R} \right) &= -\frac{\vec{R}}{R^3} \\ (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{R} &= \vec{V} \quad (\text{para qualquer } \vec{V})\end{aligned}$$

1.3 Considere o campo vetorial $\vec{F} = F_z(z)\hat{z}$ para os dois itens abaixo. Sem utilizar teoremas do cálculo vetorial (tais como Teorema de Gauss, Teorema de Stokes, identidades de Green, etc.), mostre pela “força bruta” que:

(a) $\oint_S d\vec{S} \times \vec{F} = 0$, para qualquer superfície fechada S .

(b) Tome um “cano” com uma seção de formato arbitrário, mas constante ao longo do cano (veja figura ao lado). O cano está orientado na direção z , com a tampa inferior em $z = z_1$, e a tampa superior na posição $z = z_2$. Mostre que, dentro do volume desse cano, a integral $\int_{\text{cano}} d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = A \times [F_z(z_2) - F_z(z_1)]$, onde A é a área da seção do cano.



Note que $\oint_S d\vec{S} \times \vec{F} = \int_{V(S)} d^3x \vec{\nabla} \times \vec{F}$, e que $\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{F}$. Evidentemente, se você pudesse utilizar essas identidades, os problemas acima seriam resolvidos em uma ou duas linhas!

1.4 Seja r o valor absoluto do vetor posição que vai da origem até o ponto (x, y, z) , $f(r)$ uma função escalar arbitrária de r , e $\vec{F}(r)$ um campo vetorial que depende apenas de r . Prove que

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(r) = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{d\vec{F}}{dr}$$

1.5 Calcule o divergente e o rotacional para o campo vetorial $\vec{v} = r^n \hat{r}$. Interprete geometricamente o resultado do rotacional e verifique a consistência do seu divergente através do teorema da divergência. Com o resultado, obtenha o valor da integral:

$$J = \int_{\mathcal{V}} dV e^{-r} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} \right),$$

onde \mathcal{V} é uma esfera de raio r_0 centrada na origem.

1.6 Use a função delta de Dirac em coordenadas apropriadas para expressar as seguintes distribuições de cargas como densidades de cargas tridimensionais $\rho(\mathbf{r})$:

- (a) Uma carga Q uniformemente distribuída sobre uma casca esférica de raio R (em coordenadas esféricas)
- (b) Em coordenadas cilíndricas, uma carga λ uniformemente distribuída em uma superfície cilíndrica de raio b .
- (c) Em coordenadas cilíndricas, uma carga Q uniformemente distribuída sobre um disco circular chato de espessura desprezível e raio R .
- (d) O mesmo que a parte (c), mas usando coordenadas esféricas.

1.7 A média temporal do potencial elétrico do átomo neutro de hidrogênio é dada por:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} \left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right),$$

onde q é a carga elementar e $\alpha^{-1} = a_0/2$, onde a_0 é o raio de Bohr. Encontre a *distribuição de carga* $\rho(r)$ que dá origem a esse potencial e interprete esse resultado.

1.8 Encontre o *potencial elétrico* a uma distância z ($z > 0$) do centro de uma casca esférica de raio R , que possui uma densidade superficial de carga σ uniforme. Trate tanto o caso $z > R$ quanto o caso $0 < z < R$. Expresse a sua resposta em termos da carga total (q) dessa casca esférica. [Dica: utilize a lei dos cossenos para escrever r em termos de R e $\cos\theta$. Lembre-se de escolher o sinal positivo da raiz quadrada: $\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz} = +(R - z)$ se $R > z$, e o oposto se $z > R$.]

1.9 Um cabo coaxial longo carrega uma densidade volumétrica uniforme de carga ρ_0 num cilindro interno de raio a , e uma densidade de carga *superficial* σ_0 na casca cilíndrica exterior (de raio b). A carga superficial é negativa, e possui a magnitude exata tal que o cabo, como um todo, gera um campo elétrico *nulo* fora da casca cilíndrica externa. Encontre o campo elétrico nas seguintes regiões: (a) no interior do cilindro de raio a , ou seja, $\rho < a$ (onde ρ é a distância ao eixo z em coordenadas cilíndricas); (b) no espaço entre os dois cilindros, $a < \rho < b$; e (c) no exterior do cabo, $\rho > b$. Faça um gráfico da intensidade do campo elétrico como função de ρ .

1.10 a) Demonstre que a força que atua num dipolo \vec{P} colocado num campo elétrico externo \vec{E}_{ext} é $(\vec{P} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{\text{ext}}$.

b) Demonstre que o torque atuante num dipolo nesse campo é

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times [(\vec{P} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}_{\text{ext}}] + \vec{P} \times \vec{E}_{\text{ext}} \quad (1)$$

onde \vec{R} é a distância vetorial desde o ponto em relação ao qual o torque será medido até o dipolo. A quantidade $\vec{P} \times \vec{E}_{\text{ext}}$, que é independente do ponto em relação ao qual o torque será calculado, é denominado par de giro que atua no dipolo.