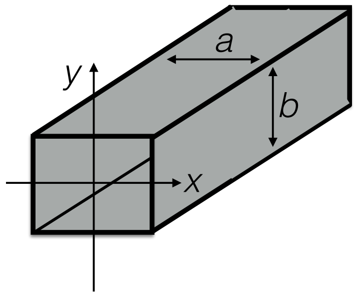
# $2^a$ Lista de Exercícios – Eletromagnetismo 1 - Noturno
**Entrega: 31/08/2016**

**2.1** — Um guia de ondas retangular é um tubo muito longo, cuja seção é um retângulo de lados $a$ e $b$, como indicado na figura abaixo. Há vacuo no interior do tubo.




**a)** Suponha que as paredes inferior e superior (em $y = -b/2$ e $y = +b/2$, respectivamente) são ambas sujeitas a um potencial elétrico $\varphi_0 \, \mathrm{sen}(2\pi x/a)$; e que nas paredes esquerda e direita (em $x = -a/2$ e $x = +a/2$, respectivamente) o potencial vale $\varphi_0 \, \mathrm{sen}(2\pi y/b)$. Calcule o potencial elétrico no interior do tubo ($-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$).

**b)** Agora suponha que a parede inferior (em $y = -b/2$) é mantida a um potencial constante, $\varphi_0$, enquanto as outras três paredes (esquerda, superior e direita) são mantidas a um potencial igual a zero. Calcule o potencial elétrico no interior do tubo neste caso. [Dica: comece encontrando uma fórmula geral para o caso de um potencial $\varphi(x)$ na parede inferior. Daí, calcule o potencial no caso $\varphi(x) = \varphi_0$.]

**2.2** — Uma caixa cúbica de lado $a$ tem, em todas as suas faces, uma densidade de carga $\sigma_0$. Encontre o potencial elétrico dentro desse cubo.

**2.3** — A expansão multipolar e os polinômios de Legendre podem ser obtidos através da expansão, em série de Taylor, de:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \ .$$

Denotando $r = |\vec{x}|$, $r' = |\vec{x}\,'|$ e $\theta = \hat{x} \cdot \hat{x}\,'$, podemos tomar, por exemplo, $r' \ll r$ e expandir essa expressão em uma série de Taylor para $r'/r$.

**a)** Mostre que essa expansão leva a:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta) \ ,$$

onde $P_\ell(\cos\theta)$ são certos polinômios de $\cos\theta$

**b)** Mostre para $\ell = 0, 1$ e $2$ que esses polinômios são, de fato, os polinômios de Legendre.

**c)** Qual deve ser a expansão em série de Taylor de $1/R$ que devemos adotar no caso em que $r' \gg r$?

**2.4** — Uma casca esférica de raio $R$ é submetida a um potencial $\varphi(\theta) = \varphi_0 \, \mathrm{sen}\, 2\theta$. Calcule (a) o potencial dentro e fora, assim como a densidade de cargas superficiais dessa casca esférica.

**2.5** — Uma casca esférica de raio $R$ é feita da união de duas "calotas", ou hemisférios – vamos chamá-los de Norte e Sul. Suponha que o hemisfério Norte possui uma densidade de carga superficial

$\sigma_0$, e o hemisfério Sul, a carga oposta, $-\sigma_0$. Calcule o potencial dentro e fora até o $4^o$ termo da expansão multipolar (ou seja, até $\ell = 4$).

**2.6** — Calcule o momento de dipolo elétrico dos dois hemisférios com cargas opostas do problema 2.5. Mostre que o campo gerado por esse dipolo coincide com o termo $\ell = 1$ da solução encontrada naquele problema.

**2.7** — Calcule o monopolo ($\ell = 0$), dipolo ($\ell = 1$) e quadrupolo ($\ell = 2$) de uma densidade de cargas dada por $\rho(r, \theta) = \rho_0 \, e^{-x/R} \cos^2 \theta$, onde $R$ é alguma constante com dimensão de distância.

**2.8** — Utilize o método das imagens para encontrar a *força elétrica* que age numa carga pontual $q$ nas seguintes situações:

> **a)** Uma "cunha" feita de dois condutores planos juntados com um ângulo de 90°. Ou seja, imagine que um dos condutores ocupa o semi-plano infinito $x \geq 0$, e o outro condutor, o semi-plano infinito $y \geq 0$. Considere que a carga encontra-se na posição $x = x_0 > 0$ e $y = y_0 > 0$.
>
> **b)** Um quadrante delimitado por planos condutores. Ou seja, imagine que os semi-planos infinitos $\{x \geq 0, y \geq 0\}$, $\{x \geq 0, z \geq 0\}$, e $\{y \geq 0, z \geq 0\}$, são constituídos de material condutor. Nesse caso, considere que a carga pontual encontra-se na posição $x = x_0 > 0$, $y = y_0 > 0$ e $z = z_0 > 0$. [Dica: utilize o resultado do item anterior.]